A MANDELBROT- és JULIA HALMAZOK.

Dr. Gyarmati Péter
prof. emeritus

Bevezetés.

Egy matematikus meteorológus megkísérelte a felhőzet alakulását, formálódását matematikai eljárással megközelíteni, leírni. Ennek eredménye a matematikának egy új ágát hozta létre, új világot nyitott a grafikai ábrázolás világába, különösen a számítógépes grafika fejlődött nagy lépésekkel és a programozók, alkotók csodálatosabbnál csodálatosabb képződményeket, képeket hoznak létre. Az előzményekhez tartoznak a fraktálok, az önhasonló alakzatok felismerése és a káosz elmélet matematikai képződményei.
A komplex dinamikával a XX. század elején kezdtek foglalkozni többben, de az igazi áttörést a számitástechnika alkalmazhatósága tette lehetővé a számolásigényesség és a grafika bonyolultsága miatt. *B. Mandelbrot* 1980-ban jelentette meg egy írását a *kvadratikus polinom*okkal kapcsolatos vizsgálatairól, a már említett felhőkről. A munkába bekapcsolódó matematikusok tiszteletből róla nevezték el ezeket a halmazokat, amelyek változatát a *G. Julia* matematikus neve fémjelez.
Ebben az előadásban ezen halmazokat kivánom bemutatni az érdeklődőknek, mégis matematikus gondolatmenettel, hiszen matematikai alkotásról van szó. Talán sikerül megmutatnom, hogy viszonylag egyszerű eszközökkel milyen rendkivül bonyolult formákat lehet alkotni és azok vizsgálata mennyire új világot tár elénk, túl az esztétikai kellemet nyújtó, látványos képeken.

Az alapok.

A Mandelbrot halmazt rekurziv eljárással hozzuk létre. A **rekurzió**, vagy **iteráció** bizonyos műveletek szakadatlan ismétlését jelenti az előzőleg kapott eredmények alkalmazásával!
Az eljárás alapja nagyon gyakran egy polinom/függvény, amely egy kezdeti érték behelyettesítése útján egy újabb értéket állít elő. A rekurzió ezen polinom/függvény kiszámításának ismétlését jelenti az előzőleg kiszámított érték behelyettesítésével.
Legyen a függvény $f(x)$; a kezdeti érték x_0; az újabb értékek rendre x_1; x_2; .... és a; b; tetszőleges konstansok, akkor

$$x_1 = af(x_0) + b;$$
$$x_2 = af(x_1) + b;.$$
.
$$x_{i+1} = af(x_i) + b;.$$
.

Ha $f(x)$; az önmagával való szorzást jelenti, vagyis $f(x) = x^2$ és $a=1$ és $b=c$ valamilyen állandó érték, akkor egy egyszerű u.n. **kvadratikus polinom**hoz jutottunk: $f(x) = x^2 + c$.
A rekurzió

$x_1 = x_0^2 + c$; (ezt ismételjük)

$x_2 = x_1^2 + c$;

$x_3 = x_2^2 + c$; és így tovább.

Az így keletkezett x_1; x_2; .... értékeket az x_0 **pályá**jának nevezzük.

Az eljárásnak számos gyakorlati jelentősége van, például a populáció növekedése az egymásután következő születési ciklusokon át. Érdemes tehát ezt a rekurziót részletesebb vizsgálat alá vetni:

- értelmezési tartomány, értékkészlet;
- konvergencia;
- ismétlődés;
- ábrázolás.

Tehát a vizsgált függvény $x_{i+1} = x_i^2 - c$ rekurzió.

1. legegyszerűbb esetek, ha $x_0 = 0;$

   - $c = 0; \quad x_1 = x_0^2 + 0 = 0; \quad tehát \quad x_0 = 0;\ x_1 = 0;\ x_2 = 0;\ x_3 = 0;\ x_4 = 0; \ldots$

   tehát az iteráció eredménye konstans, nulla.

   - $c = 1; \quad x_1 = x_0^2 + 1 = 1; \quad tehát \quad x_0 = 0;\ x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = 5;\ x_4 = 26; \ldots$c

   tehát az iteráció eredménye monoton növekvő.

   - $c = -1; \quad x_1 = x_0^2 - 1 = -1; \quad tehát \quad x_0 = 0;\ x_1 = -1;\ x_2 = 0;\ x_3 = -1;\ x_4 = 0; \ldots$

   tehát a pálya ciklikus.

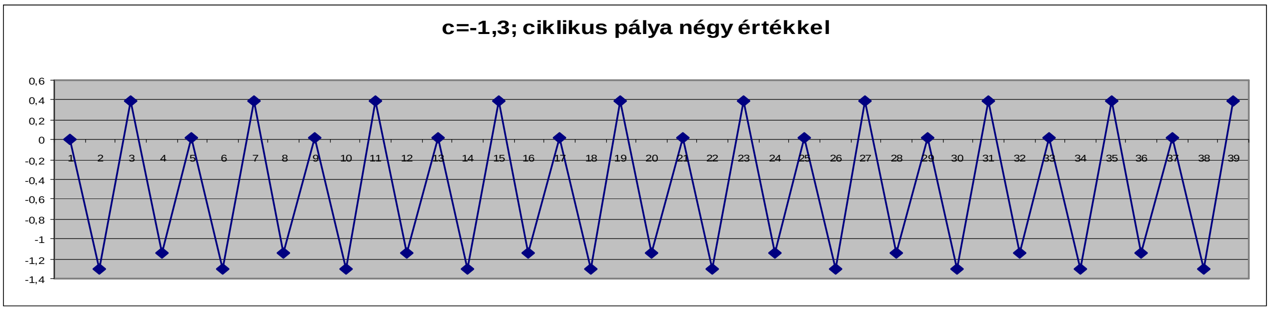
2. További esetek, amikor $x_0 = 0 \ és \ -2 < c < -0{,}1;$

- periódikus különböző értékekkel;
- konstans, vagy közel állandó;
- váltakozó, szakadásos (intermittent);
- kaotikus.

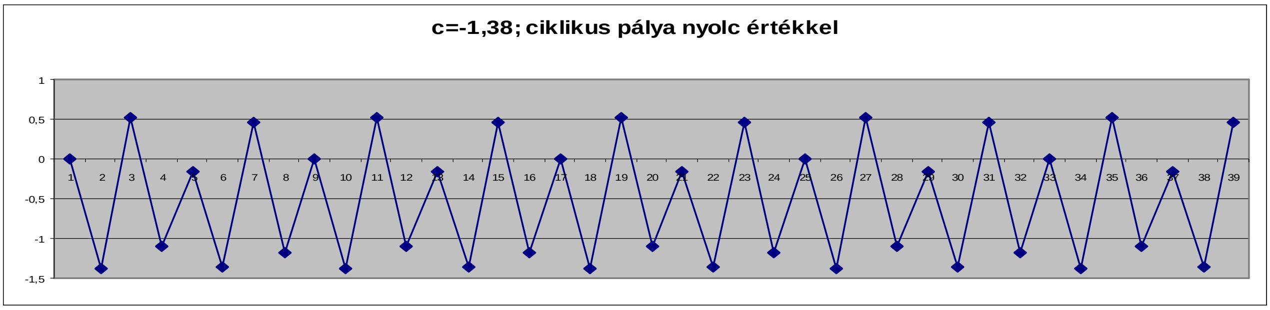
Tekintsük ezeket $x_0 = 0;$ -hoz tartozó pályákat időszakoknak és ábrázoljuk geometrikusan (az egymásután következő pontokat összekötöttük az átláthatóság kedvéért).

A *c*=*-1,1* azaz az x^2*-1,1* rekurzió esetén a pálya két érték között váltakozik: 2 periódus

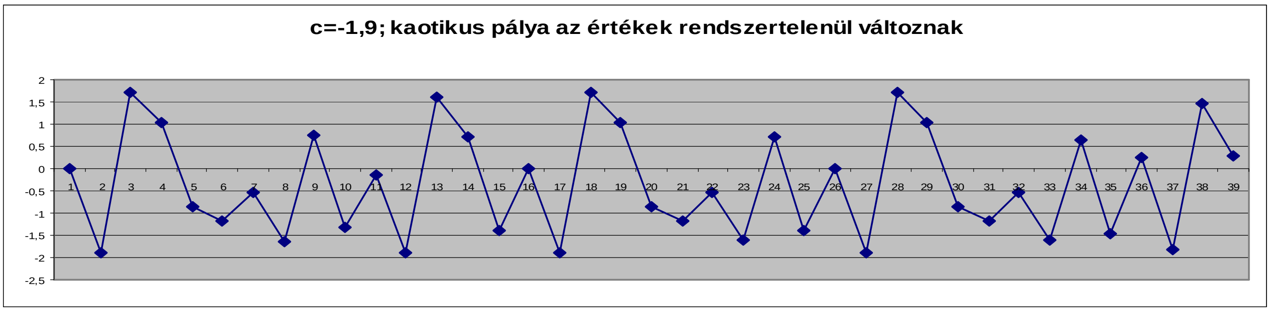
A *c*=*-1,3* azaz az x^2*-1,3* rekurzió esetén a pálya négy érték között váltakozik: 4 periódus



A c=-*1,38* azaz az x^2-*1,38* rekurzió esetén a pálya nyolc érték között váltakozik: 8periódus



A c=-*1,9* azaz az x^2-*1,9* rekurzió esetén a pálya rendszertelenül váltakozik: kaotikus



Általánosítsuk megfigyelésünket:

1. Az $x_0 = 0;$ pályája $f(x) = x^2 + c$ esetén, vagy növekszik és a végtelenhez tart, vagy nem tart a végtelenhez a c értékétől függően!
2. Ha nem tart a végtelenhez, akkor különböző módon viselkedik: állandó, ciklikus, vagy kaotikus!

Tehát a megfigyelésünk szerint kettős viselkedésű, a végtelenhez tart, vagy nem, és az esetek kölcsönösen kizárják egymást Ezt a kettős viselkedést **dichotómiá**nak nevezzük! A Mandelbrot halmaz tulajdonképen ennek a dichotómiának a leképezése.

A Mandelbrot-halmaz.

Ezen előismeretek alapján könnyen megfogalmazhatjuk a Mandelbrot halmazt: a Mandelbrot-halmazba mindazok tartoznak az eddigiek közül, amelyek nem tartanak a végtelenhez! Érezzük, hogy a megfogalmazásnak két hibája is van. Az egyik, hogy nem eléggé exakt, a másik, hogy ezek különálló pontok, pedig ismereteink szerint a Mandelbrot-halmaz csodaszép síkbeli kép. A kifogás igaz, tehát pontosítsunk!

Nézzük, hogyan keletkeznek akkor ezek a csodálatos síkrajzok, képek, mikor eddig csak pályákat, pontsorozatokat definiáltunk?

A dolog egyszerű, hogy síkot nyerjünk, az eddigieket terjesszük ki a **komplex** számokra, a komplex számsíkra, vagyis a c legyen komplex szám!

Nézzük függvényünket különböző c értékeknél:

1. Legyen c=i $f(x) = x^2 + i$ és $x_0 = 0;$ akkor

$$x_1 = i;\ x_2 = i^2 + i = -1 + i;\ x_3 = (1+i)^2 + i = -i;\ x_4 = -1 + i;\ x_5 = -i;\ x_6 = -1 + i;\ \cdots$$

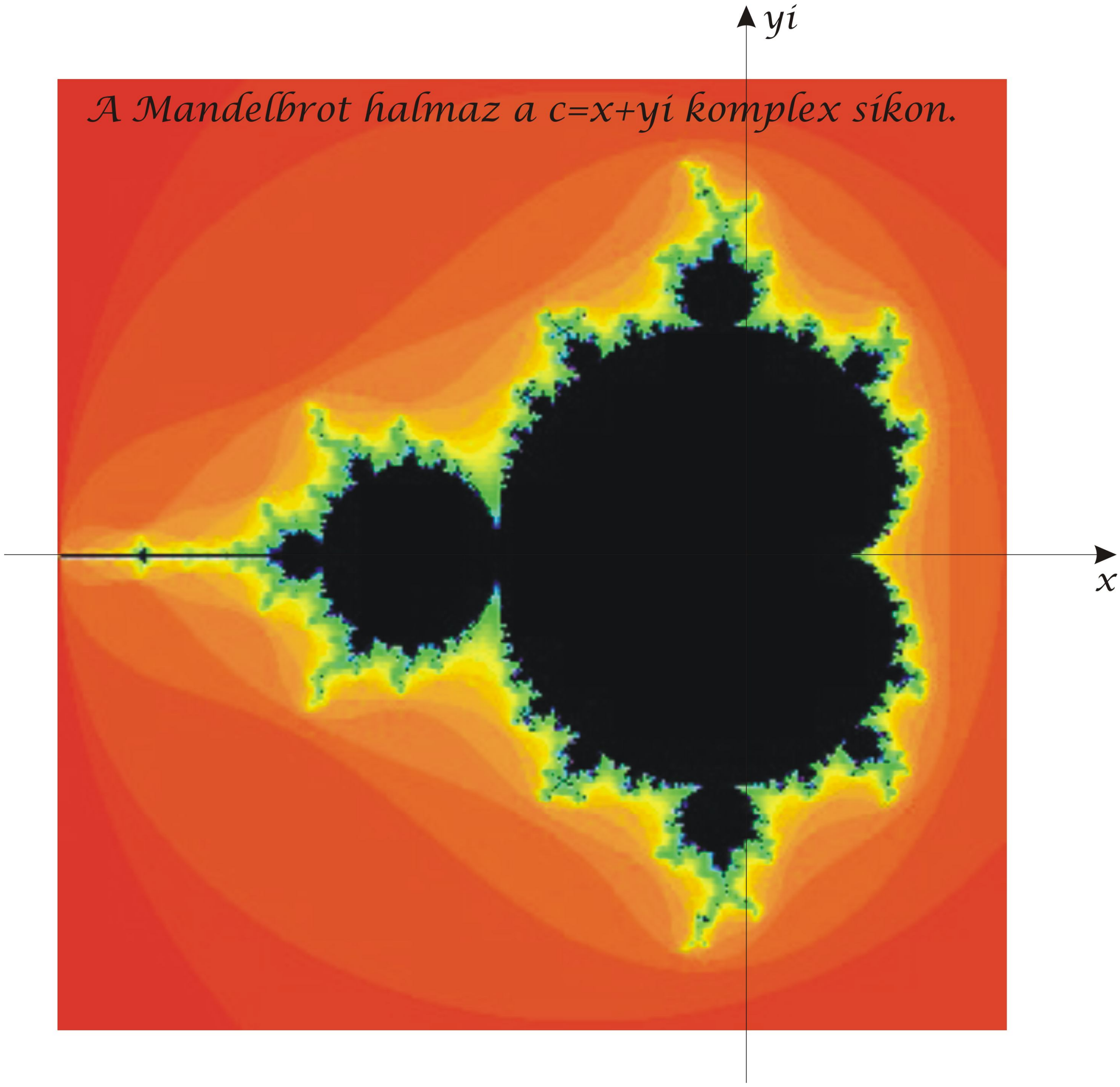
Vagyis ciklikus két értékkel: -*i*; -*1*+*i*;

2. Legyen c=*2i* és $x_0 = 0;$ $f(x) = x^2 + 2i$

$$x_1 = 0 + 2i;\quad x_2 = -4 + 2i;\ x_3 = 12 - 14i;\ x_4 = 52 - 334i; \ldots$$

vagyis egyre távolabbra kerül a *0;0* origótól (ez itt a végtelen definiciója).

Általánosítva ugyanahhoz a dichotómiához jutottunk: a végtelenhez tart, vagy nem.
Most végre exakt és grafikus értékű definicióját adhatjuk meg a Mandelbrot-halmaznak**: azon komplex c értékek halmaza, amelyeknél az $x_i^2 + c$ rekurzió $x_0 = 0$; -hoz tartozó pályája nem tart a végtelenhez, jelöljük M-el.**



A síkot, amelyen ábrázoljuk *c komplex sík*nak nevezzük: $c=x+yi$ szerint, mert M azon c értékek halmaza,....
Amint látjuk a grafika az x tengelyre szimmetrikus, mivel kvadratikus függvényről rekurziójáról van szó (az $x_i^2 + c$ helyébe $+x_i$, vagy $-x_i$ kerülhet). Az y tengely valahol a kardiodid belsejében metszi az x tengelyt, az x=-*1*-hez tartozó pont megközelitőleg a kardiodid bal oldalán lévő „kör” közepe táján van. Kardiodidnak nevezzük a szívalakú görbét, amely egy ciklois. A halmaz értelmezési tartománya $-2 < x < \frac{1}{4}$.

Ha megfigyeljük a két jellemző forma határán kisebb, de hasonló képződmények vannak és valóban láthatjuk, ha ezeket kinagyítjuk.

A korábbi számolásainkból a $c=0;\ -1;\ -1{,}1;\ -1{,}3;\ -1{,}38;\ i$ mind eleme a Mandelbrot halmaznak, míg a $c=1;\ 2i$ nem.

A Mandelbrot halmaz a **fekete** terület az ábrán, a színes részek a halmazhoz nem tartozó részek (ahol a pályák a végtelenhez tartanak) csoportosításából keletkeznek attól függően, hogy a pályák milyen „gyorsan növekszenek". Megközelitőleg a halmaztól távolodva a pályák egyre gyorsabban növekszenek. A színezés önkényes határokkal készül: **piros**, **narancs**, **sárga**, **zöld**, **kék**, **lila**, **ibolya**, ahol **piros** a leggyorsabb, míg az **ibolya** színűeknek kell a legtöbb ismétlés, hogy távol kerüljenek a **fekete** Mandelbrot halmaztól.

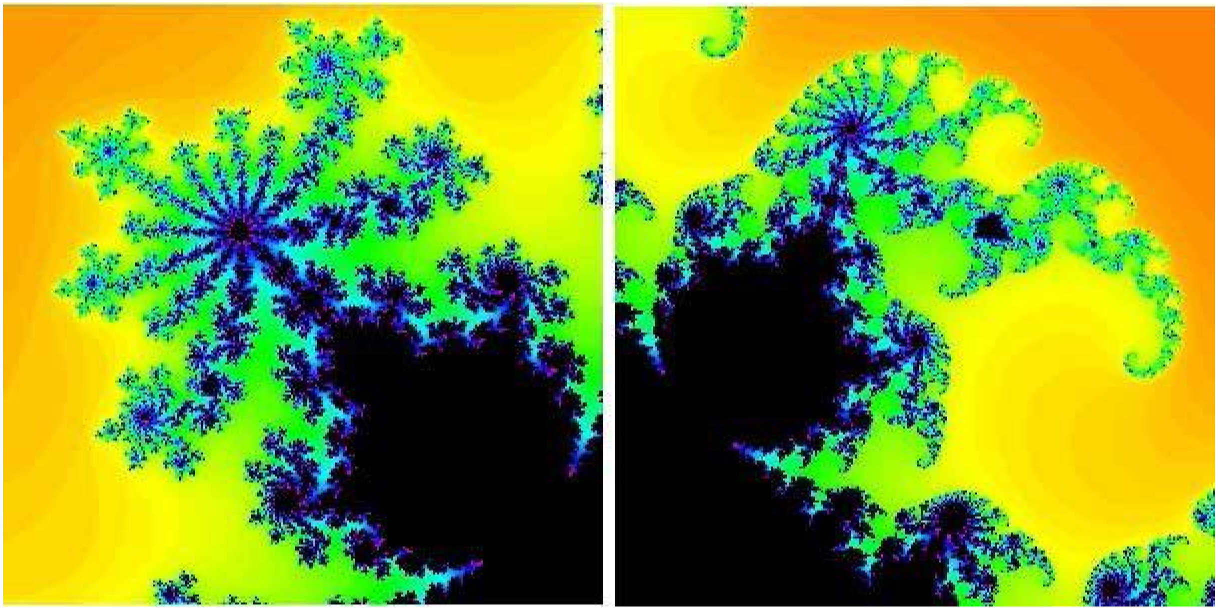
Az M halmaz „formái".

AZ M halmaz megrajzolása meglehetősen számításigényes feladat: számítógép szükséges hozzá. Az előző ábrán is láthattuk, hogy milyen bonyolult szerkezetű és ha még elkezdjük nagyítani, akkor látjuk, hogy azok a fodrok, redők éppenúgy ismétlődnek akármennyire nagyítjuk.

Ennek a redősségnek a természete még nyitott kérdés, van lehetőség az alkotó munkára. Mégis elég sokat tudunk mondani a Mandelbrot halmaz formáiról, struktúrájáról.

Nézzük akkor a részleteket: a központi rész egy szív-forma, *kardiodid* az oldalára fordítva; a kardiodidot érinti milliónyi *dekoráció*, amelyeket közelebbről vizsgálva megállapíthatjuk, hogy hasonlítanak egymásra, mégis mind különböző.

A fő kardiodidhoz közvetlenül csatlakozó dekorációkat elsődleges, *primér dekoráció*nak nevezzük. Ezekhez további dekorációk csatlakoznak, amelyek nagyítva láthatóvá válnak. A dekorációk ismétlődnek és így tovább.



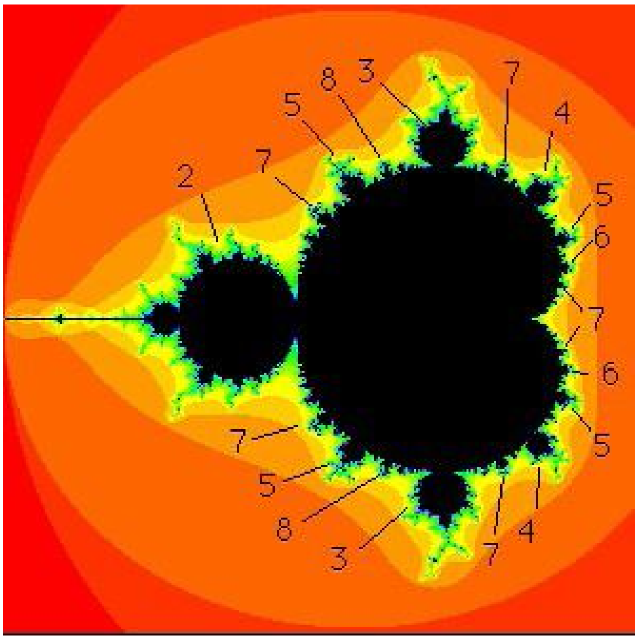
Az eredeti ábrán is megfigyelhetünk, további jellemző formát, ez az „*antenna*" az x tengely mentén a negativ irányban. A kinagyításokon is láthatóak! A nagyítást növelve, a kardiodidtól távolodva egyre több antenna ágazik ki a dekorációból. Minden dekorációhoz tartozik egy fő antenna, amelyhez további dekorációk csatlakoznak, stb. Ezek formája, az antennnák iránya, mérete mind változik és mintegy kerékküllőiként ágaznak szét. Amint azt megállapítottuk korábban: nincsen két egyforma! Viszont a számukra érdekes dolgot fedezhetünk fel, amelyet itt mutatunk be.

1	-1,1
2	0,11
3	-1,0879
4	0,083526
5	-1,09302
6	0,0947
7	-1,09103
8	0,090351
9	-1,09184
10	0,092108
11	-1,09152
12	0,091408
13	-1,09164
14	0,091688
15	-1,09159
16	0,091576
17	-1,09161
18	0,091621
19	-1,09161
20	0,091603
21	-1,09161
22	0,09161
23	-1,09161
24	0,091607
25	-1,09161
26	0,091608
27	-1,09161
28	0,091608
29	-1,09161
30	0,091608
31	-1,09161
32	0,091608
33	-1,09161
34	0,091608

A korábban meghatározott periódusok most visszajönnek: nevezetesen egy primér dekoráción belül a periódus azonos, az $f(x) = x^2 + c$ *dinamikája* minden, a primér dekorációban lévő c értékre egyazon periódus *értékei közelében van*, a rekurzió növekedésével az eltérések egyre kisebbek lesznek.

Például a két periódusú esetben, mondjuk, c=*-1,1* esetén ez a két érték: *-1,09161; 0,091608*, amint ez a táblán látható.

Ugyanez a helyzet az összes olyan c értékre, amely ezen primér dekoráción belül van, vagyis a periódus száma ugyanaz, jelöljük n-el és ez lesz a *dekoráció periódusa*. A bizonyításról a rövidség kedvéért lemondunk, de számítógépes programmal bárki kipróbálhatja.

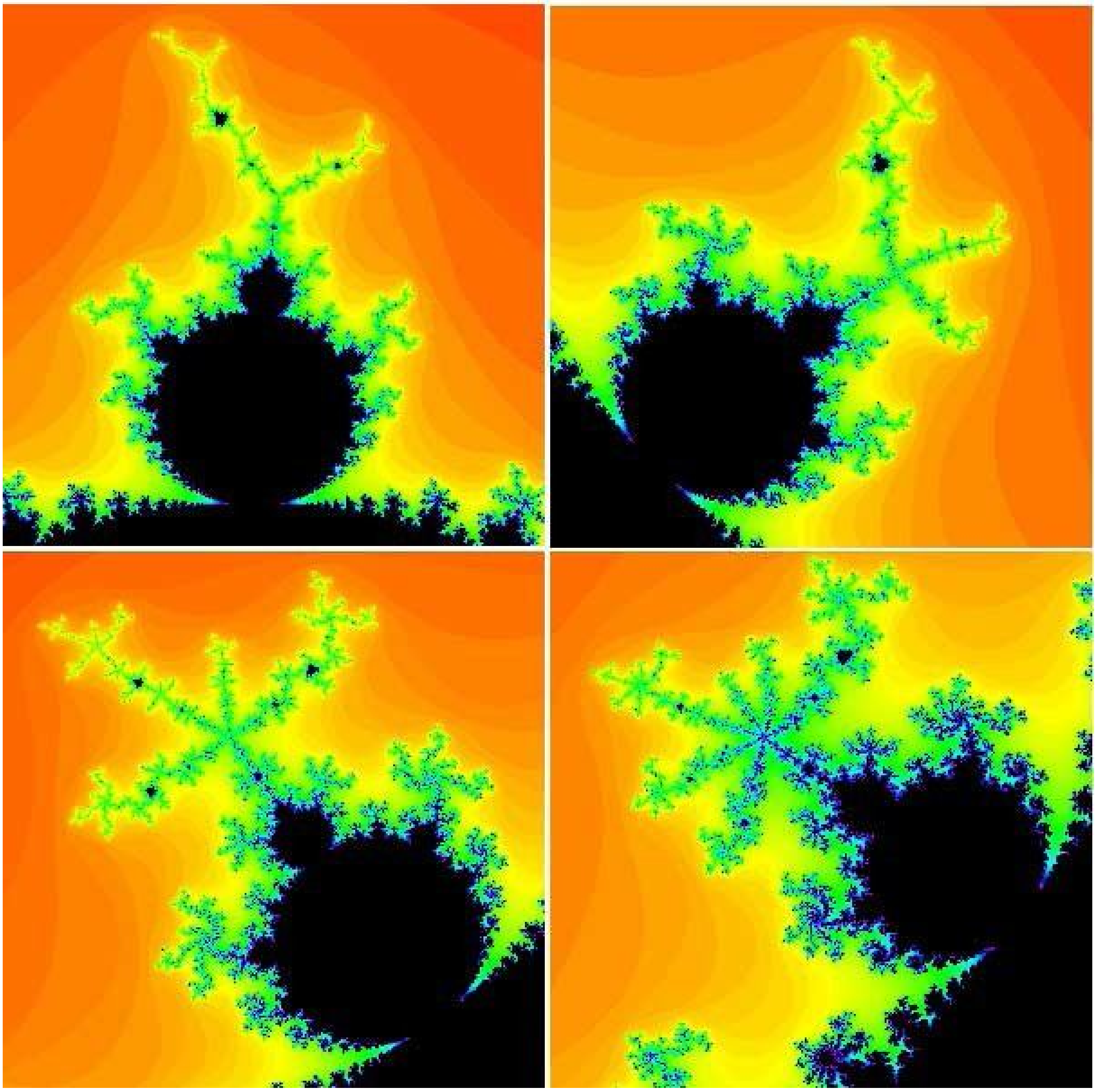


Ez az ábra néhány ebben a nagyításban még látható primér dekoráció periódusszámát mutatja. Vegyük észre a szimmetrikusságot az x tengelyre (kvadratikus függvény) és azt, hogy a periódusszámok nem ismétlődnek, kaotikusak!

A dekorációból kiágazó antenna és a rajta lévő küllők száma együttesen megegyezik a dekoráció priódusával! A korábbi ábrán látható dekorációk közvetlenül a fő kardiodidhoz csatlakoznak.

Hasonló eredményeket adnak a nem-primér dekorációk, amelyek nem csatlakoznak közvetlenül a fő kardiodidhoz. Ezeknél a dekoráció periódusa a többszöröse az antennájához csatlakozó küllőknek.

Az alábbi képeken, kinagyított részleteken, a periódus és a küllők számának összefüggéseit mutatjuk be. Rendre 3; 4; 5; és 7; periódusú dekorációkat láthatunk az antennákkal és küllőkkel.



Ne feledjük, hogy az antenna és küllők száma együtt a periódusszám.

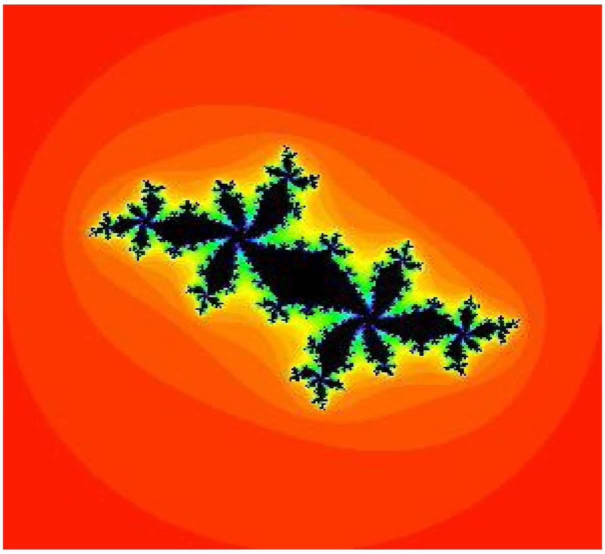
Julia halmazok.

A Mandelbrot halmaz definiciója a c értékeket tartalmazza rögzített kezdeti $x_0 = 0;$ érték mellett. Kézenfekvő lenne a definiciót megfordítani: rögzítsük c értékét és keressük meg mindazon pályákat, amelyek nem tartanak a végtelenhez. Ezek kezdő x_0 értékei alkossák az új halmazunkat. Ezt a halmazt az adott c értékhez tartozó *Julia halmaz*nak nevezzük. Gaston Julia matematikus után.

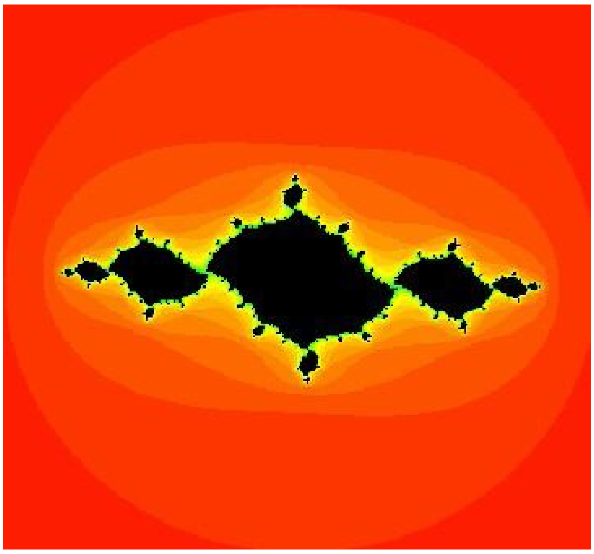
Formálisan, legyen c=*constans*; $f(x) = x^2 + c$ dinamikus függvény minden x_0 komplex számhoz-hoz. **Azon x_0 értékek halmazát, amelynél az $f(x) = x^2 + c$ rekurziója** c=*constans*; **mellett, nem tart a végtelenhez Julia halmaznak hívjuk.** Minden egyes c értékhez tartozik egy Julia halmaz.

*Szokták még definiálni és ugyanígy nevezni az itt definiált halmaz határát is. A megkülönböztetés kedvéért a mi definiciónkat **kitöltött Julia halmazok**nak nevezzük. Ebben az írásban a rövidség kedvéért a kitöltött szót elhagyjuk, de MINDIG azt értjük!*

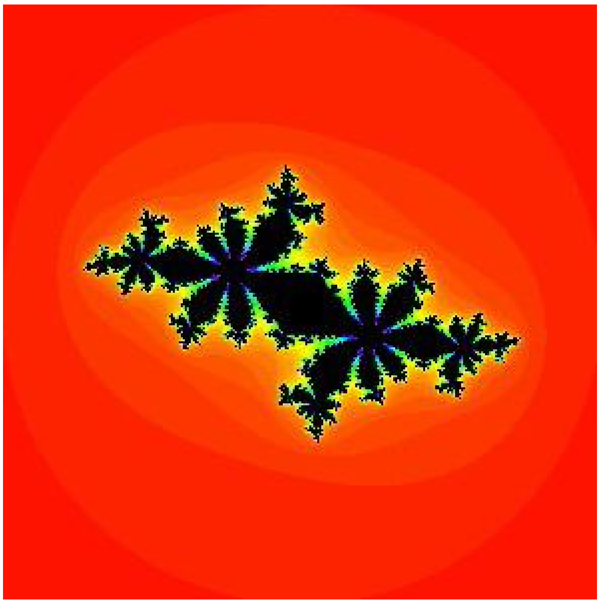
Például az $x_0 = 0;$ pálya az $f(x) = x^2 + 0$ esetén a *(c=0)* halmaz eleme, $f(x) = 0\,; \forall x$, de $x_0 = 0;$ pálya NEM eleme az $f(x) = x^2 + 1;$ *(c=1)* halmaznak, mert tart a végtelenhez.
Tehát minden egyes c értékhez külön halmaz tartozik! Ezért Julia halmazokról beszélünk és jelöljük az egyes halmazokat J_c-vel, ahol c mindig egy konkrét érték..



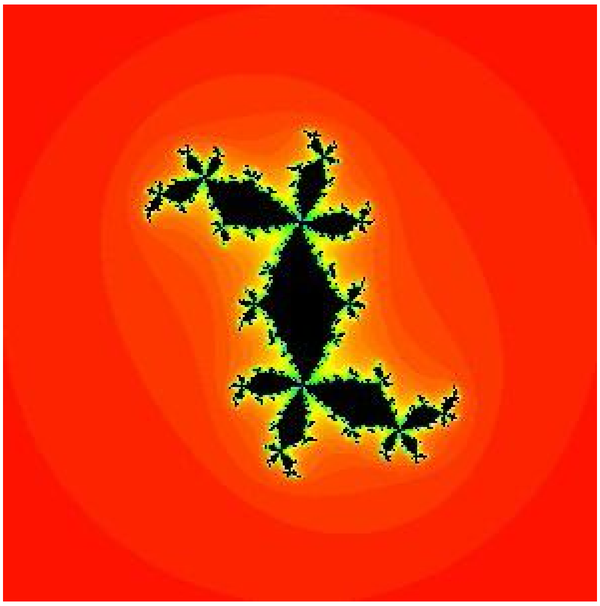
c=-1,037+0,17i periódus 2



c=-052+0,57i periódus 5



c=0,295+0,55i periódus 4



c=-0,624+0,435i periódus 7

Néhány tulajdonság.

1. Egy nagyon egyszerű Julia halmaz a *c=0* értékhez tartozik: ez egy *kerek tárcsa*.

Talán minden más halmazt csak számítógép segítségével lehet meghatározni.

2. Amint látjuk a példákon a Julia halmazok nem kevésbbé izgalmasak és éppen úgy értelmezhetők rajtuk a periódusok , az antennák és küllők, de másképen alakulnak. További izgalmas formákat képeznek.

3. Összehasonlítás:

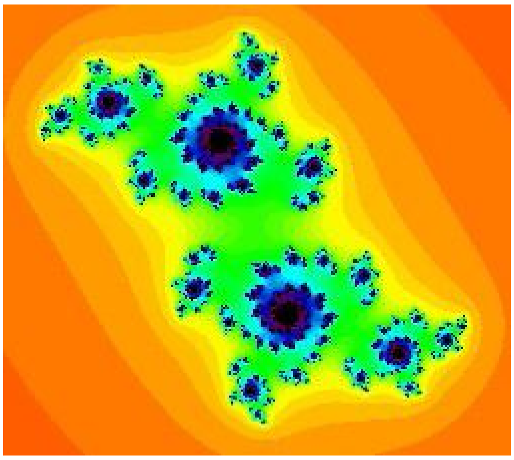
- A Mandelbrot halmaz kép a c komplex síkban, *paraméter sík*nak nevezzük és egyetlen halmazból áll;

- A Julia halmazok képek az x komplex síkban, *dinamikus sík*nak nevezzük és minden egyes c értékhez tartozik egy halmaz.

4. A Julia halmaz elemei egymáshoz tetszőlegesen közeli, *diszkrét pontok*, ami a definiciójából következik. A fenti ábrákon látható halmazok pontjai egymáshoz kapcsolódnak, ezáltal egy darabból állóak. *Kapcsolt Julia-halmazok*-nak hívjuk őket.

5. A Julia halmazok éppúgy periódikusak, mint Mandelbrot társuk: a kétértéküek egymással érintkező tintapacnik, míg a többértékűek érdekes alakzatokat képeznek, mint a például a sokféle csúszó-mászók, amint az ábrákon is látható.

5. A Julia halmazokat a Mandelbrotéhoz hasonlóan ábrázoljuk: Kihasználjuk a a halmaz dichotómiáját és feketével a halmaz elemeit, míg más színekkel a végtelenhez tartó nem-halmazbeli elemeket vesszük fel, ugyanavval a színkonvencióval.
6. Vannak azonban olyan Julia-halmazok is, amelyek „foltjai" nem érintkeznek egymással: különálló ponthalmazok sokaságából állnak! Az alábbi ábra egy ilyet mutat.



Jól láthatjuk az egymással nem érintkező fekete részeket és azt, hogy azok felhőszerű kupacokban gyülekeznek és furcsa spirálisszerű módon vannak elrendeződve. Az ilyen halmazokat *tejút Julia halmazok*nak nevezzük.
Julia és Fatou matematikusok 1919-ben bebizonyították, hogy a Julia halmazok pontjai, vagy csatlakoznak egymáshoz, --egy darabból állnak, vagy végtelen sok diszkrét pontból állnak. Akárha a Tejút-rendszer képét látnánk: érdekes kutatási téma, ma is, a Tejút-csillagrendszer ilyen módszerű leképezése.
Számunkra az egy újabb tulajdonságot mutat, a Julia halmazok egy újabb dichotómiájára találtunk. A Julia-halmazok az $f(x) = x^2 + c$-re nézve vagy egy darabból állnak, vagy végtelen sokból (nincs köztes darabszám).
Vajjon hogyan lehetne megállapítani egy adott J_c -ről, hogy kapcsolt, vagy tejút, azaz egy darabból, vagy végtelen sokból áll?

A megoldás szerencsésen egyszerű, az $f(x) = x^2 + c$ iterációjában az $x_0 = 0$;-hoz tartozó pálya mondja meg:
-- ha ez a pálya a végtelenhez tart, akkor J_c is végtelen darabszámú, vagyis tejút halmaz;
-- ha ez a pálya nem tart a végtelenhez, akkor J_c egy darabból áll, vagyis kapcsolt halmaz.

Létezik egy másik módszer is a dichotómia meghatározásához a Mandelbrot halmaz révén:

-- vagyis minden Mandelbrot halmazbeli c-hez tartozó Julia-halmaz egy darabból áll! Hiszen c akkor és csak akkor része M-nek, ha $f(x) = x^2 + c$; $x_0 = 0$; esetén nem tart a végtelenhez és pont ez a feltétele a kapcsolt J_c -nek.

-- Az M-hez nem tartozó c esetén a J_c végtelen sok darabból áll, azaz tejút J_c. Megjegyzem, a mélyebben érdeklődőknek, hogy ezek a végtelen halmazok Cantor-halmazok.

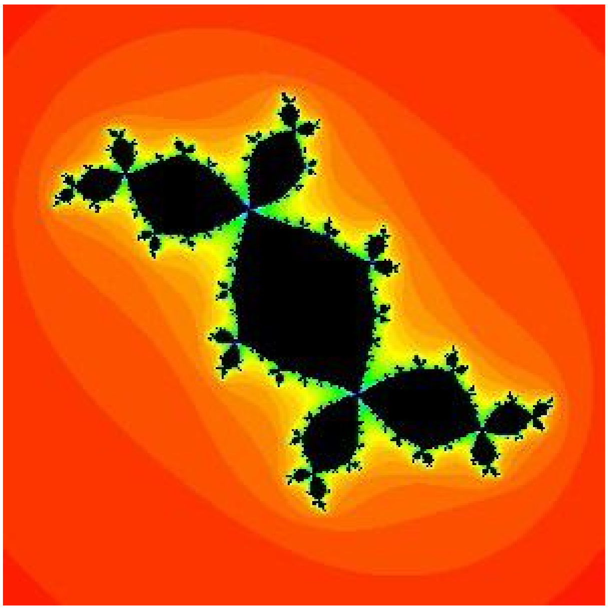
A definició megfordítható, vagyis a Mandelbrot halmaz az összes olyan c értékből áll, amelyekre a Julia halmaz kapcsolt.

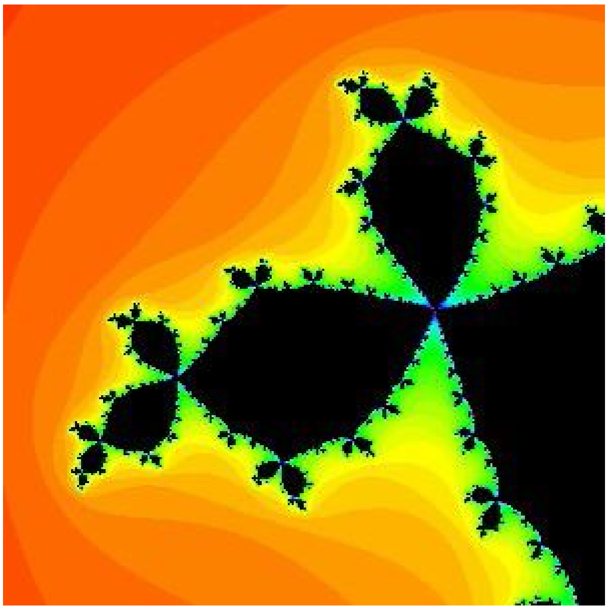
Ennek a kölcsönös megfelelésnek --az $x_0 = 0$; pálya tulajdonsága-- mélyebb matematikai értelme van, amely azonban mostani témánknak nem tárgya.

Néhány további összefüggés az M és a J_c között.

1. *Régiók*. Amint az ábrákon is látjuk ezek a „tintapacnik", *régiók*nak nevezzük, amelyek mintegy csomópontokbál ágaznak szét, mindig egy nagyobból egy, vagy több kisebbe, majd ezek újabb csomópontokhoz érnek, ahol a régiós szétágazás ismétlődik ugyanolyan számban, de más formában. A régiók mind kisebbek, mint amelyből kiágaznak, Megjegyzem, a mélyebben érdeklődőknek, hogy ezek *fraktálok, önmagukhoz hasonlító alakzatok*. Másik előadásban van szó róluk.
2. *A szétágazás száma a halmaz periódusa*: amely ugyanehhez a c értékhez tartozó M halmaz periódusszámával azonos. Vagyis ezáltal azt tudjuk J_c ről, hogy kapcsolt, mivel tartozik hozzá M és a csomópontokból szétagazó *régiók száma* az M periódusával azonos.

Nyuszifül. Az ős számítógépes időkben rendkivüli teljesítmény volt egy-egy halmaz „kiszámítása", ábrázolása. Egy ilyen teljesítmény eredménye -–természetesen már mai számitógéppel készített teljes képpel— a fenti ábra, amelyet Douady-nyuszijának, vagy fraktál-nyuszinak hívnak. A. Douadyról, aki úttörője ennek a matematika-területnek. A név onnan keletkezett, hogy minden régióból két kisebb régió növekszik ki, mint a nyusziból a fülei. A nagyításon láthatjuk, hogy a részletekben ismétlődnek a nyuszifülek.

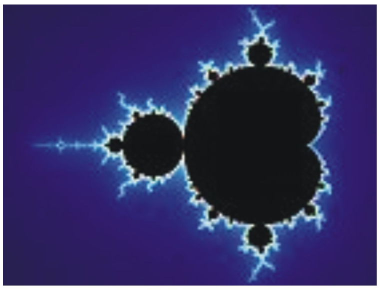
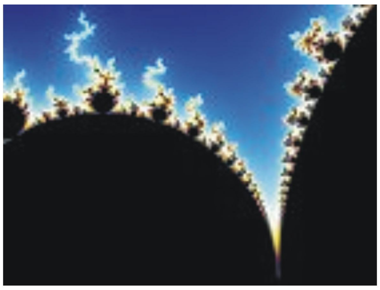
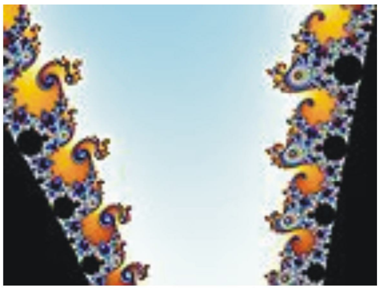
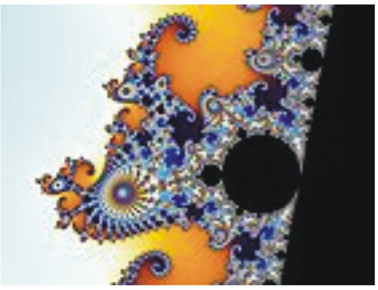
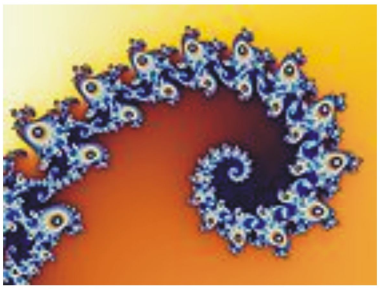
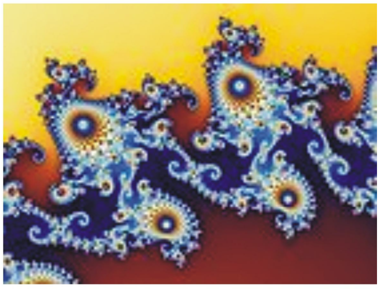
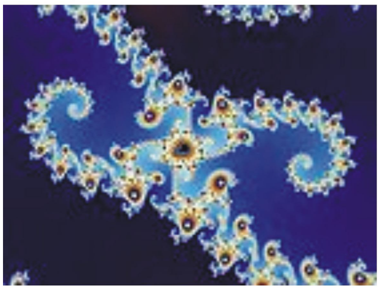
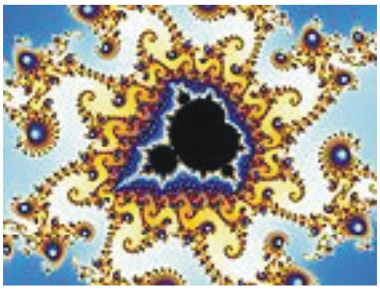
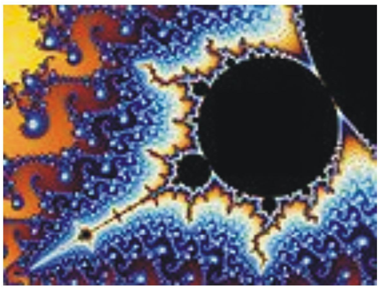
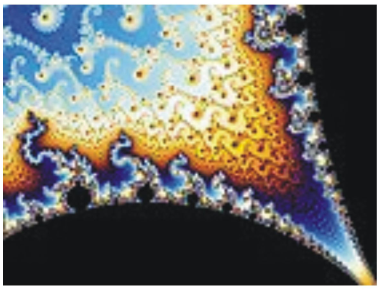
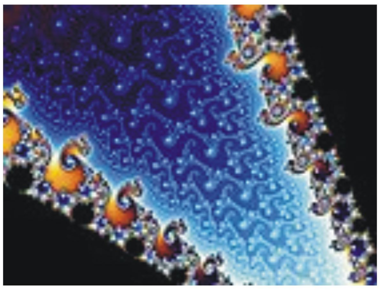
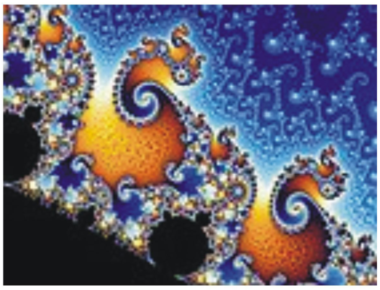
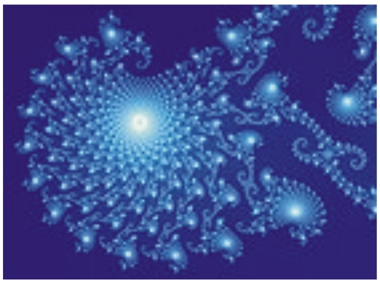
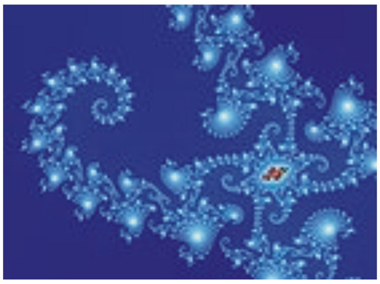
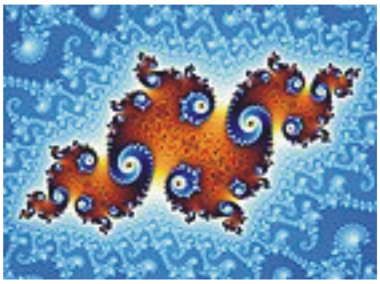




c = −0.12+ 0.75i periódus 3

Mi is készíthetünk M halmaz ábrákat: R. Devaney professzor, a Bostoni Egyetem matematika professzora jóvoltából, lehetőségünk nyílik látni különböző, de egymáshoz tartozó M és J_c halmazokat ezen a weblapon: http://math.bu.edu/DYSYS/applets/Quadr.html. A program

lehetőséget ad animációra is, amelynek során megfigyelhetjük, hogyan „esik szét” a kapcsolt halmaz tejút halmazzá, vagyis egy darabból végtelen sok darabbá.
További képek innen: http://www.softlab.ntua.gr/miscellaneous/mandel/gallery/01-10.html elérhető. Olyan lehetőség is van, hogy az általunk készített képeket közzé tegyük.
Akiknek nincs alkalma az oldalak megnézésére, azok számára itt bemutatunk egy néhány látványos „tengeri csikóhal” képződményt.

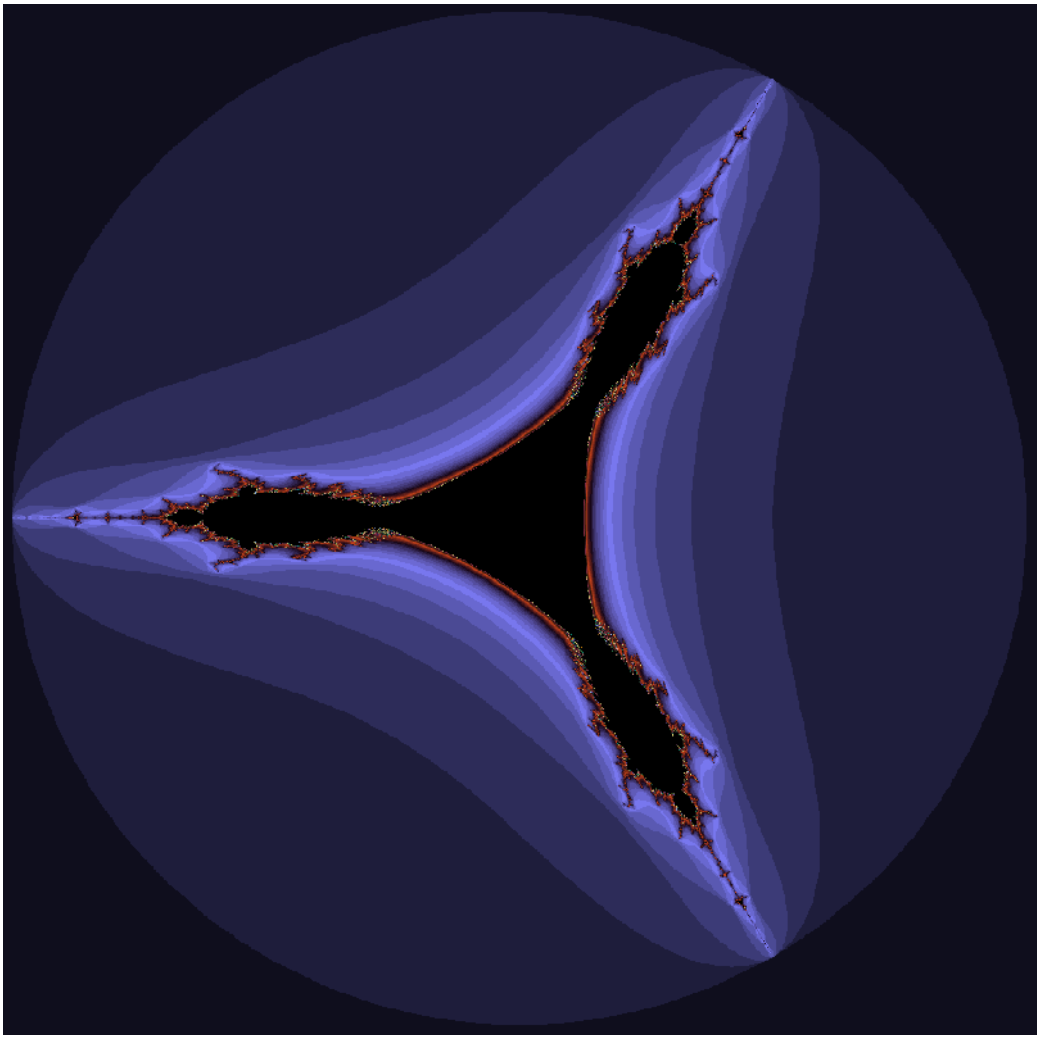
















Végezetül a matematikus „csűrés-csavarás"-aiból a Mandelbrot halmaz világában:

A matematikusok soha nem maradnak nyugton, --minden bizonnyal más tudomány képviselői sem--, az elért eredmények, mindig újabb és újabb kérdéseket és ezáltal megoldandó problémákat vetnek fel. Itt sincs ez másképp! Ezekből mutatok be egy kis ízelítőtt az alábbiakban.

Az M halmaz konjugáltja: a Mandelbar halmaz.

Az M halmazt a $f(x) = x^2 + c$ függvény rekurziójával állítjuk elő, ahol c komplex szám és a rekurzió miatt az x is komplex, vagyis $x = v + ki$; ahol a v az x valós részét, k a képzetes részét jelenti. Azonban egy komplex számot képezhetünk az előjel megfordításával is: $\bar{x} = v - ki$. Ezt hívják a komplex szám konjugáltjának. Részletesen most nem tárgyaljuk. Végezzük el a műveleteket így, vagyis a függvényünk: $f(\bar{x}) = \bar{x}^2 + c$ alakú lesz. Tehát azon c értékek halmaza, amelyre az $f(\bar{x}) = \bar{x}^2 + c$; $x_0 = 0$-hoz tartozó pályája nem tart a végtelenhez. Ezt a halmazt *Mandelbar-halmaz*nak nevezzük a hasonlóság miatt (azért bar, mert az x feletti vonást bar-nak nevezik). Az irodalomban sokszor *tricorn-halmaz*nak is hívják a formája miatt.
Azt várnánk, hogy az M és az $\overline{M}$ ugyancsak hasonló lenne, azonban a fraktál természeten túl egészen más formációt képez, amint azt az ábrán is láthatjuk:

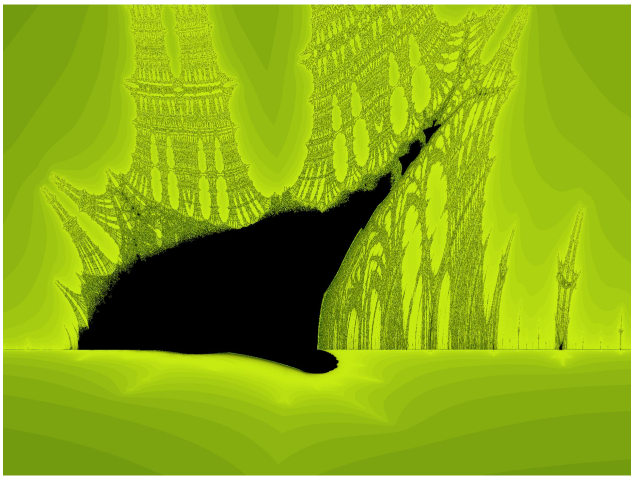


További leképezések.

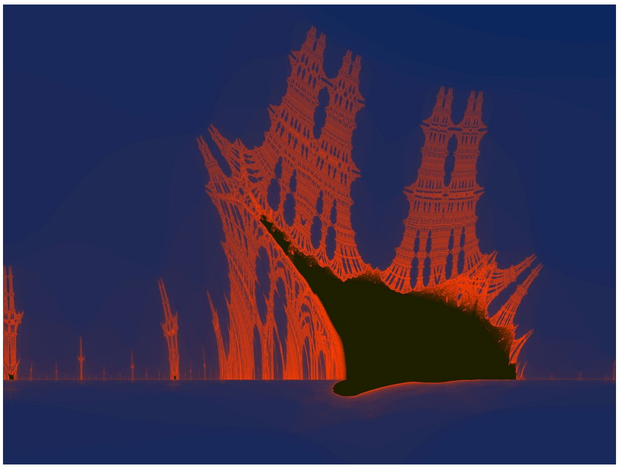
További hihetlen kép-világ tárul elénk, ha az $f(x) = x^2 + c$ függvényen más változtatást végzünk: legyen a rekurzió most

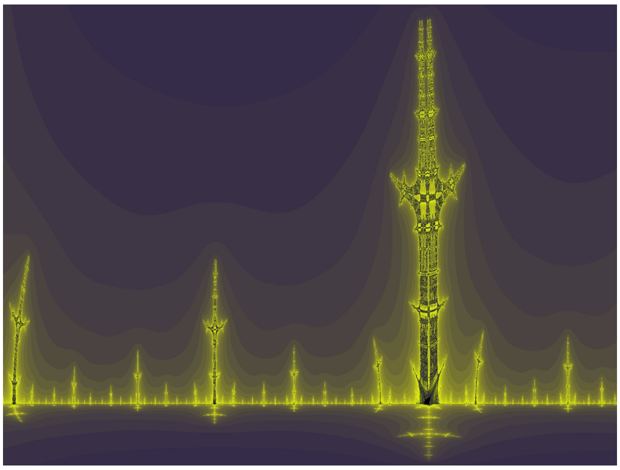
$$x_{i+1} = \left(\left|\mathrm{Re}(x_i)\right| + i\left|\mathrm{Im}(x_i)\right|\right)^2 + c \;; \quad x_0 = 0$$

vagyis az x komplex szám valós és képzetes részeit külön-külön az abszolút értékeikkel helyettesítjük. Ezt a leképezést 1992-ben Michael Michelitsch and Otto E. Rössler készítették és *égő hajó*nak nevezték el.
A részletek egy fantázia-világot hoznak létre.
Az első kép itt a hajó, a második, az első kép bal széléről egy kinagyított részlet.
A nagyítás alatt mi most nem optikai méretnövelést értünk, hanem a halmaz egy részének újraképezését a c értékeinek egy részével és kisebb léptékű változtatásával. Ez tulajdonképen azonos az optikai nagyítással, az ott fellépő számos hiba (felbontás, vonalvastagodás, részletek hiánya, stb.) elkerülésével.



A részletek ujabb képzésével és másik színezés választásával újabb meséket láthatunk. Egy mesevilág tárul elénk, tornyokkal, kilátókkal, távolbavesző építményekkel! Mindez feltárul előttünk egy kicsit más színezéssel. Láthatóvá váltak az önhasonló –fraktál-- képződmények.
A negyedik ábra a legfantasztikusabb: egy süllyedő hajót látunk, amely magával ragadja a várost katedrálisaival egyetemben. Ismét más színezéssel, hogy a tenger és az ég kék legyen. Aztán égő város, dőlnek a tornyok, és minden a tengerbe süllyed, fantasztikus.





Az általánosítás, a Multibrot halmazok.

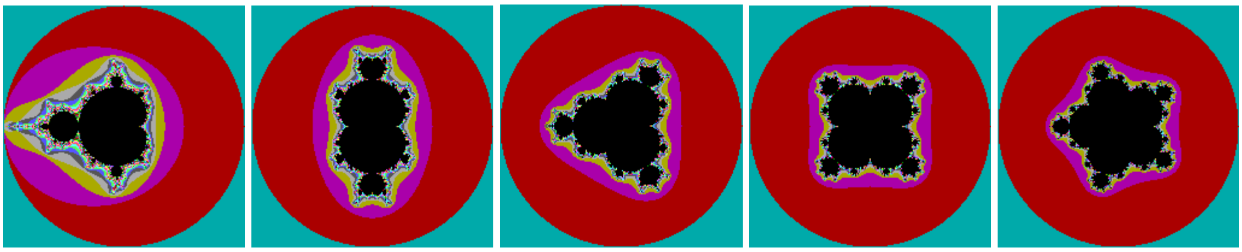
Tegyünk még egy matematikus „csűr-csavart” és általánosítsuk a függvényünket, vagyis ne korlátozzuk kvadratikusra, másodfokúra a polinomunkat. Nézzük meg mi történik így:

$f(x) = x^d + c$, ahol a *d nem nulla egész szám*, minden más változatlan.

Ezeket némi szójátékkal *Multibrot halmazok*nak nevezzük.

Pozitiv egészek esetén

- $d=2$, esetén visszajutunk az eddig tárgyalt esetekhez,
- $d=1$ esetén monoton növekvő sort kapunk, amely nem eleme az M halmaznak: végtelenhez tart.
- $d>3$ *(pozitiv egészek)* esetén az M halmaz többszöröződni lászik, méghozzá d-*1* szerint:



Az ábrán a d= *2; 3; 4; 5; 6* esetén láthatjuk a halmaz sokszorozódását.

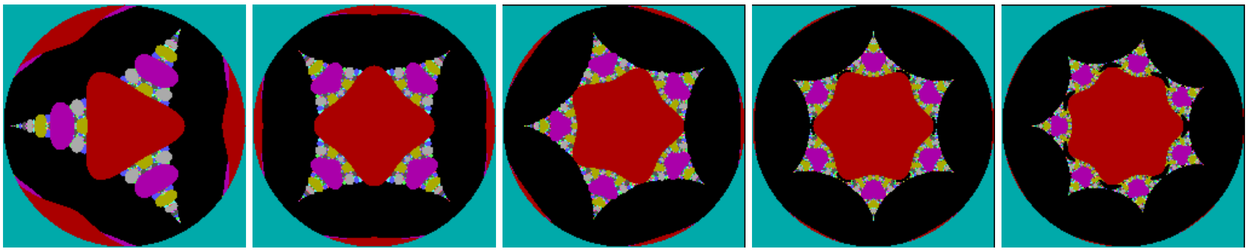
Egy érdekes eredmény, hogy analitikus úton, tetszőleges pontossággal tudunk szabályos sokszöget rajzolni.

Negativ egészek esetén

Ha d értékét kiterjesztjük a *negativ egészek*re is, akkor ismét újabb képeket nyerünk. Itt is megfigyelhetjük az eredeti halmaz ismétlődését, csak most inverz formában.

A szimmetrikus kaleidoszkóp-formákban gyönyörködhetünk.

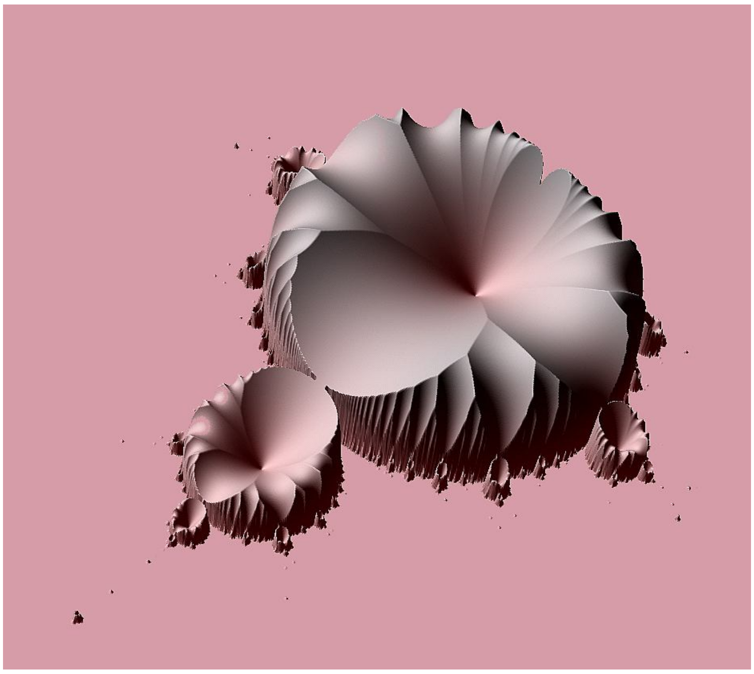
Nézzünk néhányat (a halmaz elemei fekete színűek, a halmazon kívüli részek az u.n. *EscapeTime* algoritmus szerint vannak színezve, amelyet korábban is alkalmaztunk):



A képeken rendre a d= *-2; -3; -4;-5; -6* esetén látjuk az M halmazt.

Képezzünk térbeli képeket.

Ha még emlékezünk az M halmaz képzésére, akkor tudjuk, hogy minden c értékhez tartozik egy $x_0 = 0$–val induló *pálya*, amelynek értékei végesek, és ciklikusak, vagy kaotikusak.



Térbeli képet úgy kapunk, hogy a c *komplex sík* fölé egy harmadik dimenziót –legyen z-- helyezünk és minden egyes c értékhez egy z értéket rendelünk. Legyen a z a pálya legkisebb abszolút értéke, $\min|x_i|$.

Ha számításokat elvégezzük, ezt az ábrát kapjuk:

Ne feledjük, definiciónk szerint csak a halmazon belüli értékekre létezik az ábra.

Összefoglalás

A közismert szerkezeti formákon, struktúrákon túl, most a struktúrák egy különleges osztálya néhány tagjával ismerkedtünk meg: ezek a *Mandelbrot- és Julia hamazok*. A közös tulajdonságuk, és egyben az érdekességük a látványos geometriai megjelenésükből fakad.
A forrása ezeknek a struktúráknak a matematika *dinamikus rendszerek* területe, ott is az $f(x) = x^2 + c$ komplex függvény egyes megjelenítéséből származnak.
Megismeredtünk ennnek során a *rekurzió, iteráció* fogalmakkal, pontok komplex síkon (x sík; c sík) való ábrázolási módszereivel, dichotóm tulajdonságokkal, amelynek révén szétválasztottunk például periódikus és végtelen folyamatokat.
Végül nem mellékesen, hiszen éppen ez adja ezek közérdeklődését, megismerkedtünk ezen halmazok képének különlegességeivel, szépségével, harmóniájával
Bevezetést kaptunk *a fraktálok, a rekurzió, a káosz* különleges világába.
Ugyanakkor megtudhattuk, hogy ezen a dinamikus formák világa még egyáltalán nincs feltárva, nyitva van az út a kutatók számára további felfedezésekre.
Talán éppen ezek révén jutunk közelebb természetünk számos még nem elegendően leírható részének mélyebb magyarázatához, mint például a felhők formálódása, a csillagrendszerek alakja, vagy a kis jégkristály fantasztikus képződései.
Ha Isten a maga képére teremtette az embert, akkor vajjon mi a tovább szaporodásunk során fraktálok vagyunk? Hiszen hasonló képűek, de különbözőek vagyunk, éppúgy, mint a fraktálok! Vajjon a Földön, mint egy konkrét c értékhez tartozó térben struktúrákat képezünk, J_c halmazokat, folyamatosan változó, dinamikus szerkezeteket (vagy persze ennél sokkal bonyolultabbakat)? Lehetséges lenne ennek révén közelebb jutni az emberek csoportosulásának értelméhez, a kultúrák természetéhez? Ki tudja! A gondolat, a lehetőség mindenesetre lenyűgöző!
Köszönöm, hogy meghallgattak.

OoooO