GYARMATI PÉTER

BEVEZETÉS A GONDOLKODÁS ISKOLÁJÁBA:
A DESCARTESI ESZME ÉS PÓLYA GYÖRGY.

Készült a középfokú Tudományos Önképzőkörök előadássorozataihoz.

Mottó:
...Mondják e Földön nincs elégedés:
De, ki zúgolódik, hogy esze kevés?!
(Arany János: Bolond Istók)

TARTALOMJEGYZÉK


~~~~~
~~~~~

Rendhagyó matematika óra.

Matematika órát tartunk most, mégsem számtanról, mértanról lesz szó.
A cím szerint matematika-történeti, tiszteleti óra lenne és persze mindenféle tudálékos tanulság levonásával, valamint pár másodperces néma tiszteletadással a múlt nagyjai iránt.
Hiszem, hogy ők sem erre vágynak, sokkal inkább arra, hogy az utódok éljenek az általuk alkotottakkal, tudják és értsék mi beNne a jó, de szolgáljon tanulságul a rossz is!
Nos, mielőtt áttekintenénk Descartes és Pólya munkásságát nézzük meg egy példán mi is az ő tárgyuk.
Nem lesz nehéz ez a példa, sőt egyszerű, de azért benne van az ördög, akár a részletekben, ahogy a mondás tartja.

Tehát a példa: mennyi 5+5? Vajon =10, vagy nem?

- Ha =10, az számtanilag rendben van!?
- Ha ezekhez a számokhoz valamilyen fogalmat rendelünk, akkor ez a szám mértékké válik, a hozzárendeltek mérőszámává. Például 5nő+5férfi=hány vizibicikli? Nyilván nem 10!

A folytatásban Pólya Györgyöt fogjuk követni legalábbis, ami a gondolatmenetünket illeti. Ehhez vezessünk be egy osztályozást:

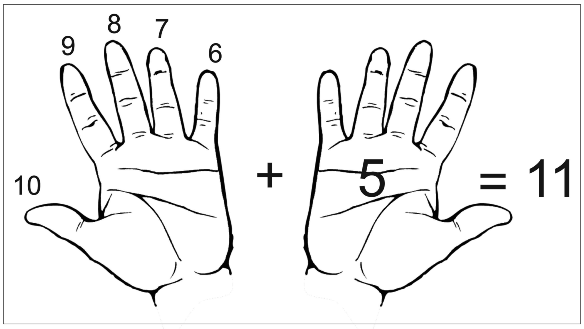
- figyel

- ügyes

- okos

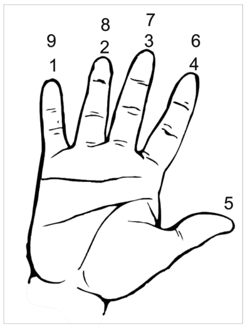
Számolunk és értékelünk.

Térjünk akkor vissza az 5+5=10 kiszámolására!



Hány ujjam van? Számoljuk meg! Ha így számolom (baloldali ábra), akkor 11, ha úgy (jobboldali ábra), akkor meg csak 9!

Pedig az előbb kiszámoltuk, hogy 10! Akkor melyik igaz? Vagy minden rendben van és csak az a fránya számtan a ludas? Vagy valami más nem jó?



Akik azt állítják, hogy nem jó, azok megkapják a *'figyel'* osztályzatot!

Nem, nem kettest! Nem számozunk, mert egyszer már kódoltunk, amikor a cselekvésre a fogalmat megalkottuk – figyelés - és a nyelvünkben értéket adtunk neki, azaz van hangértéke és írásértéke! Tehát a fogalom a cselekvésnek az általánosítása, absztrakciója, az elnevezése pedig kultúránk más területéről származik, magyarul a figyel szó, amely más nyelvekben eltérő, de a fogalom maga az ugyanaz! Tehát a 'figyel' szó itt már egy kód, ezért nincs szükségünk további kódolásra, számokra, vagy bármi másra! Már csak azért sem, mert pontosan értjük, tudjuk mit jelent, hogyan kell kezelni és tisztelni azt, aki kiérdemelte.

A számokat az osztályozáshoz azért rendelték hozzá, hogy az additív szemléletűek is megértsék melyik a nagyobb.
Gondoljuk csak meg: a jók az élenjárók, ők a prímák, a priorok, a pro-, a pre-. Mindenki más utánuk következik. Ugye ez nem számozás! Még akkor sem, ha később számokat is rendeltek emberekhez: például XIV. Lajos, vagy XVII. század. Ezek történelmi időrendek és nem értékek! Tehát megállapíthatjuk, hogy ez a fajta számozás rendet, rendezési elvet jelent! Nem értékmérő, azaz nem mérték!
Rádásul azt is vegyük észre, hogy ha már értékként tekintjük, tehát osztályozunk, akkor is az élen lévő a jobb, vagyis a prim, a pionír, az úttörő, az első!
A ma divatos osztályozás, fordított szemlélet, az additívitás mindenhatósága, amikor igyekeznek mindenre számszerűséget erőszakolni: a nagyobb a jobb, a több, az értékesebb. Tiszta pénzszemlélet,

mert az az egyetlen olyan dolog, amelynél kizárólag ez a szempont: a több, vagy a nagyobb a jobb. Jellemző példa a televíziók „tudás”-versenyei, ahol nem a tudás az elsődleges tényező, hanem a nyeremény nagysága!
De gondoljuk meg mire jó a mi ”bevált” 1-2-3-4-5 osztályozási rendünk! Mindenfélét lehet vele csinálni: összeadni, átlagolni, csoportosítani, idősorokat képezni, összevetni a többiekkel, stb.
Pusztán az csak a kérdés, hogy igazságos-e? A tanárok 4 alát, meg fölét, egykettedet, stb. adnak! Vajon miért? Nyilvánvaló, hogy nem szeretnék, ha az osztályuk éppen öt csoportra bomlana! Sokkal inkább hívei a folytonosságnak, a fejlődés ösztönzésének.

Még egy gondolat erről: az átlag: (1+2+3+4+5)/5=3, azaz közepes! Ez a jó!?

Igaza van Pascalnak, amikor azt állította, hogy: *Egyetlen érdemünk a gondolkodás. Nem a tér és nem az idő - amit nem tudunk kitölteni - emelnek fel bennünket, hanem a gondolkodásunk. Meg kell tanulnunk helyesen gondolkodni:* ***ez az erkölcs alapelve****.*
A helyes gondolkodás nem veszélytelen, a kiemelkedően magasrendű értelmet éppúgy őrültségnek tartják, mint a teljes értelmetlenséget, ***csak a középszerű a jó****.*

Na, de térjünk vissza a mi kis példánkhoz!
Ki tudja megmondani, hogy akkor mennyi az és miért?
Tehát azt mondjátok, hogy 10, akkor mi az a 9 és a 11? Hiba? Rossz számolás? Aki így gondolja az ’ügyes’ minősítést érdemel!
Valójában hibás számlálás: fogalmakat kevertünk össze, a sorszámot és tőszámot. (cardinális, ordinális) a 11 esetében és az egyik ujj csak egyszer szerepelt a számlálásban a 9 esetében.
Aki ezt így tudja az az ’okos’!
DE! Kételkedünk sajátmagunkban is, hátha hibáztunk, ezért ellenőrízzük: számlálással, azután összeadással (két egyforma kéz): valóban mindkét esetben 10 az eredmény.
Legvégül, aki mindezt hajlandó volt végigcsinálni az kapja az összefoglaló ’gondolkozik’ minősítést!

’figyel’+’ügyes’+’okos’+ellenőriz=’gondolkozik’

Persze ez most nem teljesen jogos, mert ez egy kollektiv mérkőzés volt és a probléma, illetve a minősítés bemutatására szolgált.

<u>Gondolkodom, tehát vagyok.</u>

Az ember életének legnagyobb nehézsége közé tartozik dolgok, események végiggondolása, de azért meg kell tennünk mert ez vezet eredményre, hiszen *„a problémáinkat emberek okozzák, ezért azokat az emberek megoldhatják* – mondta J.F.Kennedy az USA elnöke (1963.06.10.). A világunk megismerésére vannak a természettudományok, amelyek segítségével igyekszünk a világ és köztünk keletkező problémákat megoldani. A társadalomtudományok segítenek a társadalmi problémák megoldásában. A matematika nyelve, eszköze az egyes tudományoknak.
A nehézségnek számtalan oka van: időhiány, lustaság, mások megteszik helyettünk, amúgyis fölösleges, mások már megoldották, majd lemásolom, utánozom a többieket, puskázni is lehet, stb.
Az első lépés tehát, hogy egyáltalán *figyeljünk oda* a minket érintő, érdeklő dolgokra, azután *legyünk kíváncsiak*, van-e közünk hozzá, befolyásol-e minket és ha így van, akkor ugorjunk neki, *gondoljuk végig*, *oldjuk meg*!
Innen, de csak ettől kezdve, kaphatunk segítséget Descartestól, Pólyától. A két munkásság közös vonásairól, a Descartesnél a Módszerről, Pólyánál a Megoldásról, mindkettejük esetében az általános, mondhatnám filozófiai vonatkozásokról és az általuk létrehozott eszközökről, technikákról beszélünk most röviden.
Munkásságuk oly hatalmassá terebélyesedett, hogy – szerencsére – több tanévet is áthidal megismerésük még akkor is, ha az a matematika tantárgy keretein is túl ér. Fizika, biológia, informatika, de ma már nyelv és irodalom, történelem, stb. sem nélkülözheti, tehát alkalmazza.

<u>René Descartes</u>

Kezdjük akkor az idősebbel: René Descartes (1596-1650). A kor, a XVII. század első fele, a barokk-, a 30 éves háború-, a mikroszkóp-, Balassi Bálint-, az Erdélyi fejedelemség kora.

Descartes kalandkedvelő filozófus, matematikus volt. Részt vett a fehérhegyi csatában és Érsekújvár ostromában. Főként Hollandiában alkotott, ahol a protestánsoknak nem tetszett, viszont Párizsban a skolasztikusok, a katolikus egyház, üldözte. Az ok a filozófiai munkája, a dualista felfogása: a gondolkodó- és a kiterjedt szubsztancia. Mindenben kételkedni kell, mert csak egy biztos, a létezésem, a *COGITO ERGO SUM* !

Matematikai munkásságának fő műve a *Discourse de la Methode* (Értekezések a módszerről) és annak *Geometrie* függeléke. Tulajdonképpen az analítikus geometria megalapítójának és az egyenletek megoldási módszerei rendszerezőjének tartjuk. Igazából nem a nagy felfedezők, inkább a tudományos szellem gerjesztői közé soroljuk.

Olyen „szemtelenségeket” okoskodott ki: mint ez:

„Nincsen semmi, ami igazságosabban van elosztva az emberek között, mint a józan ész; mert mindenki azt hiszi, jutott neki belőle. Többet, mint amennyi van, még azok sem igen szoktak maguknak kívánni, kiket minden más dologban igen csak nehéz kielégíteni.”

Pólya azt írja róla, hogy *„terve – hogy minden probléma vissza-vezethető egyetlen egyenlet felállítására és annak megoldására – kudarcot vallott és e kudarcnak nagyobb hatása volt a tudományra, mint számtalan sikernek. Ha Descartes elgondolása nem is válik be mindig, igen sok esetben, köztük kimeríthetelenül sok igen fontos esetben alkalmazható.”*

Tulajdonképen, amikor egy „szöveges feladatot” egyenletek felállításával oldunk meg, akkor Descartes eljárását követjük.

Tehát a *methode*, a problémamegoldás, röviden:

1. A problémát vezessük vissza matematikai prolémára (vagyis igyekezzünk a matematika egzaktságával fogalmazni).
2. A matematikai problémát algebraira formáljuk.
3. Az algebrai problémát alakítsuk egyenletté!
4. Oldjuk meg az egyenletet és ellenőrizzük a helyességét.

Descartes a módszert annyira lényegesnek tartotta, hogy „mellékesen” olyan nyelvezetet alakított ki az algebra számára, amelyet lényegében ma is használunk, továbbá megadta, rendszerezve az egyenletek egyszerűsítésének szabályait és nem utolsó sorban bemutatta a geometria algebraizálásának módszerét, a róla elnevezett kartéziánus, vagy derékszögű koordináta rendszert.

Ezzel tulajdonképen megalapozta az analítikus geometriát, megmutatva, hogy bármely geometriai mérés visszavezethető legfeljebb másodfokú egyenlet megoldására a derékszögű koordináta-rendszerben.

Mind filozófiai, mind matematikai eredményei az idők során hibásnak bizonyultak, mégis munkássága meghatározó, a dogmatikus középkori Európában a tudomány elindítói közé tartozik és a *„gondolkodom, tehát vagyok”* szelleme máig ható katalizátora világunknak.

<u>Pólya György.</u>

Ezekután szóljunk néhány szót hazánkfia Pólya Györgyről (1887-1985) a descartesi methode széleskörű kiterjesztőjéről, akinek munkássága mindannyiunk számára több, mint tudomány: iskola, a problémamegoldás iskolája.

A kombinatorikában, a számelméletben alkotott jelentőset, közismertek az egyenlőtlenségi tételei, a Pólya-sejtés, a Pólya-folyamat.

A sejtésről bebizonyították valótlanságát elég nagy számoknál, de így is közvetett bizonyitékul szolgál bizonyos Liouville-tulajdonságoknak. A róla elnevezett folyamat jelen korunk számos esetének meghatározó jellemzője, amikor az egyenlő eséllyel indulók esetében nagyon gyorsan egészen szélsőséges különbségek alakulnak ki. Ennek magyarázata az odavezető útban található, ezért *útfüggő folyamatok*nak is nevezzük.

<u>A Pólya-folyamat.</u>

A Pólya-folyamatot az alábbi kísérlettel lehet jól bemutatni:

Legyen kezdetben egy dobozban egy fehér és egy fekete golyó, amelyből kiveszünk találomra egyet, majd kiegészítve egy vele azonos színűvel visszatesszük (most már három golyó lesz a dobozban, például két fehér és egy fekete, amennyiben fehéret húztunk). Ezt a húzás-kettőzés-visszatevés lépést tetszőlegesen ismételve kapunk egy Pólya-folyamatot.
Látható, hogy egyenlőségből indultunk ki és már az első lépés után ez jelentősen felborul, azaz a példánk szerint az esély a fehér javára billen. A dobozban lévő golyók színösszetétele nagyon gyorsan konvergál az egyik szín javára, de merő véletlen, hogy melyik lesz az.
Ilyen folyamatokkal írható le a pozitív visszacsatolású rendszerekben minden változás, legyen az javulás, rosszabbodás, stb. Átmeneti javulás lehetséges, hiszen húzhatunk a kevesebb számú golyókból is, de a nagyobb számúak előfordulási valószínűsége, amint láttuk drasztikusan nő. Vezetéselméleti területen, szervezeti, piaci kérdésekben, tőzsdei manőverekhez alkalmazható stratégiai pontok felismerésére, a stabilitás és a rugalmasság váltására, stb. Közismert példája a folyamatnak a „sztár-csinálás”, amikor az egyenlők közül hirtelen emelkedik ki a sztár, de hasonlóak a nagy karrierek, a váratlan csődök, vagy a gazdasági csodák is. Más példák a Pólya-folyamatra, mindazok az esetek, amikor hatalmas méretű megegyezések keletkeznek, szabványok születnek, tulajdonképen „logikus magyarázat” nélkül: a közlekedésben a jobbra hajts, az óramutató járási iránya, az irógép billentyűzete, a kereskedők utcája, a vonat nyomtáv, az autó kezelőszervei, stb.

A heurisztika.

A mai előadásban minket elsősorban a rátalálás művészetében adott eredményei érdekelnek. Hivatalos nyelven szólva a *matematikai heurisztika* megalkotója, a gondolkodás módszereinek Descartes után imételt középpontba helyezője.
„A heurisztika, egy jelző, a felfedezés kiszolgálását jelenti. A heurisztikus okoskodás nem mint végső, visszavonhatatlan jelenik meg, hanem csak, mint időleges, átmeneti gondolat, amelynek célja, hogy elősegítse az adott pronléma megoldását.” – írja Pólya a Gondolkodás iskolája című művében.

„Gyakran vagyunk kénytelenek heurisztikusan okoskodni. El fogjuk érni a teljes bizonyosságot, amint eljutunk a teljes megoldáshoz, de addig meg kell elégednünk többé-kevésbbé plauzibilis – nyilvánvaló - gondolatokkal. Erre éppúgy szükségünk van, mint egy építkezésnél az állványozásra.” – folytatja.

„A heurisztikus okoskodás a maga helyén nagyon jó! Ami rossz lehet, az a szigorú bizonyítással való összekeverése és ami még ennél is rosszabb, a heurisztikus okoskodás feladása a szigorú bizonyítás kedvéért.” Ez is Pólya véleménye, amit érdemes megfogadnunk és mindig szem előtt tartanunk!

A heurisztikus okoskodás leggyakrabban az indukcióra és az analógiára épül és eszközeiben alkalmazza a logikát és a problémakörben már megszerzett, tanult, vagy tapasztalt ismereteinket. Nyilvánvaló, hogy általános recept nincsen, továbbá az is nyilvánvaló, hogy minél több tudással rendelkezünk az adott probléma körében, annál könnyebb dolgunk lehet.

A gondolkodás iskolája.

A gondolkodás iskolája könyvben a problémamegoldás menetének négy lépését találjuk:
1. Értsd meg a problémát;
2. Készíts tervet a probléma megoldására;
3. Hajtsd végre a tervedet;
4. Ellenőrizd az eredményt és gondold át hogyan lehetne javítani rajta.

A lépéseket ki szoktuk egészíteni még néhány fordulattal:

5. Ha nem tudod a megoldást, keress hasonlót, rokont (analógia), vagy bontsd részletekre, amelyet meg tudsz oldani (particionálás).
6. Ha a kiinduló adatokból kezdve nem jutsz előbbre (analízis), kisérelj meg feltételezni megoldást, részmegoldást és ellenőrízd helyességét, vagy helytelenségét(szintézis, backward chaining). Ha helytelen, válassz másikat!
7. Mindig vizsgáljuk meg, ha eredményre jutunk, hogy létezik-e további megoldás is!
8. A probléma és a megoldása is csak bizonyos esetekben érvényes, létező, tehát mindig meg kell határoznunk az eredmény létezésének körülményeit, feltételeit!

<u>Összefoglalás</u>

Összefoglalólag elmondhatjuk, hogy a heurisztika, a *rátalálás*-, a *rávezetés* módszere, amelyet magunkon és másokon – tanítványokon, segítséget kérőkön, stb. – gyakorolunk, amikor problémát oldunk meg, vagy problémamegoldást tanítunk. Ugyanakkor a problémamegoldás mindennapos gondunk, hiszen egyre kevésbbé hagyhatjuk, hogy helyettünk mások döntsenek dolgainkról. A problémamegoldás körébe tartozik annak eldöntése is, hogy döntünk-e.

Sokan a Descartes és Pólya által létrehozott iskolát, annak igazi művelését, művészetnek tartják, ami talán nem is olyan istenkisértés, hiszen szokás a matematikát is művészetnek tekinteni, mivel nincs is a klasszikus tudomány-definiciók értelmében tárgya. Mégis végtelen az alkotási tere és kikerülhetetlen eszköze más tudományoknak. A problémamegoldás iskolája tehát módszer a tudományok és a mindennapi élet számára.

~~~~~

<u>Függelék: példák a heurisztikus gondolkodás bemutatására.</u>

forrás:...archivum071212\adat1\MATH\mathcounts\mathcounts_2006-2007.pdf

<< A problémamegoldás nehézsége megtalálni azt, aki megoldja. >>

1. Találgatásos (becslés, feltételezés) módszer.

(Guess, Check, Revise)
Ez a módszer egy folyamat, amelynek során valamilyen meggondolással választ mondunk a kérdésre, majd annak feltételezésével megoldjuk a problémát. Ellenőrizzük a megoldást és ha ellentmondásra, vagy a feltételezéstől eltérő megoldásra jutunk, akkor a becslésünk nem volt jó. Az így szerzett információk alapján kiséreljük meg a becslés, feltételezés finomítását és ismételjük mindaddig, amig ellentmondásmentességre, illetve a feltételezéssel azonos eredményre jutunk.
A példa:
A régi iskolában a jó teljesítményért kék és piros kártyácskákat kaptak a gyerekek, amelyeket a tanév végén összesítettek és a legjobbak elismerést kaptak. Az összesítésben a kék egy pontot, a piros két pontot ért. Az egyik tanuló összegyűjtött 57 cédulát, amelyek összege 79 pont. Vajjon *hány kéket és hány pirosat* kapott?

Az információnk tehát : az 1 és 2 pontos cédulákból 57 van és azok együtt 79 pontot érnek.

Első feltételezés: legyen ugyanannyi 1 és 2 pontos! Ha egyfomán lennének, akkor átlagosan 1,5 pontot érne egy cédula, amelyből 57 darab van,

- vagyis 1,5x57=1x28,5+2x28,5=85,5 pontot,

- látjuk ez több, mint a ténylegesen szerzett 79 pont,

- ez akkor lehetséges, ha kevesebb kétpontos van! (ez az információ!)

Újabb feltételezés: a kiszámolt 85,5-79=6,5; ennyivel kevesebb lenne a jó eredmény. Legyen 28,5-6,5=22 kétpontos és 28,5+6,5=35 egypontos,

- tehát 22x2+35x1=44+35=79 pont,

- az eredmény egyezik a feltételezéssel és ellenmondás sincs!

Tanulónk *22darab piros és 35 darab kék* kártyát szerzett az iskolaévben.
~~~~~

2. Egyszerűsítéses módszerek.

(Simpler Case)

Három különböző technikát mutatunk be az egyszerűsítésre: a felosztás, részekrebontást (a), a helyettesítést (b), és a korlátozást (c). Mindegyiknél a feladatot valamilyen egyszerűbb esetre vezetjük vissza, olyanra, amelyet meg tudunk oldani, majd ebből, ezekből jutunk el a végső eredményhez. Ne feledjük, az ismétlés, az ellenőrzés sohasem hagyható el!

a. Felosztás, részekre bontás. Partitioning

Számos esetben a probléma nagyon komplex és ezért egy lépésben nehezen, vagy nem is oldható meg. Ilyenkor a meg kell kisérelnünk a feladatot részekre bontani úgy, hogy azok egyszerűbbek és főként megoldhatóak legyenek. A részekre bontás csak olyan lehet, hogy azok összesenje az eredeti problémát adja vissza. Bizonyos esetekben a felbontás nehéz logikai feladványt eredményez, mert pontosan meg kell mutatnunk, hogy az egyes részek teljesen lefedik és nem fedik túl az eredeti problémát.

Példa.

Milyen keresztmetszetű csövet gyártasson a Vízművek, hogy ugyanannyi vízmennyiség szállításához a legkevesebb anyagot használja fel. A gyár négyzet, téglalap, és kör keresztmetszetű csöveket tud készíteni.

Ha feltételezzük, hogy minden esetben ugyanolyan sebességgel áramlik a víz, akkor bármelyik forma esetén ugyanakkora területűnek kell lennie a keresztmetszetnek.

A megoldás az lesz amelyik a kerületek közül a legkisebb, hiszen akkor kell a legkevesebb anyagot felhasználni a készítéséhez.

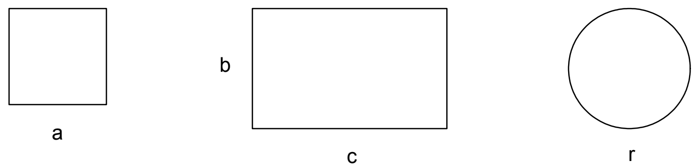
Tehát a feladatot két részre bonthatjuk:

1. négyzet és a téglalap kerületének összevetése (azért ez, mert hasonló formájuk miatt egyszerűbbnek látszik);
2. az előbbiből a kisebb és a kör kerületének összevetése;

mégpedig úgy hogy azok alapterülete azonos legyen.

3. Ezután következik a részfeladatok összesítése a teljesség megállapításával (ezt a matematikusok *az egzisztencia és unicitás* tételének hívják, vagyis annak, hogy az eredmény létezik és egyértelmű).

Készítsünk ábrákat és jelöljük meg az oldalakat:



1. részfeladat:

-a terület azonosság alapján: $a^2 = bc$; innen $a = \sqrt{bc}$

- a négyzet kerülete: $4a$;

-a téglalapé: $2b + 2c$;

-feltételezzük, hogy a négyzet a kisebb, tehát $4a \le 2b + 2c$; innen $a \le \dfrac{b+c}{2}$;

-behelyettesítve a terület azonosságot: $\sqrt{bc} \le \dfrac{b+c}{2}$;

-mindkét oldalt négyzetre emeljük a gyök elkerülésére: $bc \le \dfrac{1}{4}\left(b^2 + 2bc + c^2\right)$;

-eltüntetjük a törtet és a jobboldalt kivonjuk a baloldalból: $0 \le \left(b^2 - 2bc + c^2\right) = \left(b - c\right)^2$; tehetjük, mert nem változik az egyenlőtlenség irány, ha ugyan akkora pozitív számmal szorozzuk;

-mivel $\left(b - c\right)^2$ pozitiv – bármilyen szám négyzete pozitív - , ezért a fenti kifejezés igaz, tehát a négyzet kerülete kisebb, -ahogy feltételeztük-, mint a téglalapé (az egyenlőség jel esete, amikor a téglalap azonos oldalú, b=c, vagyis négyzet).

2. részfeladat:

-a terület azonosság alapján: $a^2 = r^2\pi$; innen $\frac{a}{r} = \sqrt{\pi}$;

- a négyzet kerülete: $4a$;
-a köré: $2r\pi$;

-feltételezzük, hogy a négyzet a kisebb, tehát $4a \le 2r\pi$; innen(*4r*-el osztva): $\frac{a}{r} \le \frac{\pi}{2}$;

-behelyettesítve a terület azonosságot: $\sqrt{\pi} \le \frac{\pi}{2}$;

-mindkét oldalt négyzetre emeljük a gyök elkerülésére: $\pi \le \frac{\pi^2}{4}$;

-mindkét oldalt elosztjuk π –vel és szorozzuk *4*-el: $4 \le \pi$;
-ez nem igaz, tehát a feltételezésünk nem jó, ezért a kör a kisebb.

3. a két részfeladat összesítése:
A második részfeladatnál már kihasználtuk az első eredményét – csak az ott kapott kisebbik alakzattal számoltunk tovább --, ezért a végeredmény éppen a második részfeladat eredménye. Tehát az azonos alapterületű idomok közül a kör kerülete a legkisebb: *a Vízművek kör keresztmetszetű csövet rendel, hogy a legkevesebb legyen az anyagköltsége.*

b. Helyettesítés. Substitution

Más esetekben a feladat olyan adatokat tartalmaz, amelyekkel nehéz dolgozni, ezért azokat egyszerűbbekkel helyettesítjük és a végén visszahelyezzük az eredetieket. Például a csillagászatban a nagyon nagy távolságokat a fényévvel helyettesíjük, vagy a földmérésben a valóságot méretarányos térképpel helyettesítjük. A térképen elvégzett méréseket a méretaránnyal visszaszámolva kapjuk meg a valóságos adatokat. Tulajdonképen számos absztrakció ilyen módszernek tekinthető, amikor az eredetit egy kezelhetőbbel cserélünk fel. A módszer bonyolultabb számolások esetén is alkalmazható, amikor például egy áttekinthetetlen, összetett kifejezést egyetlen betűvel helyettesítünk, majd a műveletek elvégzése után az eredeti kifejezést visszahelyezzük.

Példa. Oldjuk meg ezt a negyedfokú egyenletet: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.
Írjunk x^2 helyébe mondjuk y -t!

Akkor az $y^2 - 5y + 4 = 0$ kifejezést kapjuk, ami egy másodfokú egyenlet és a megoldó képlettel kiszámolhatjuk:

$y = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$; innen

$y_1 = \frac{5+3}{2} = 4$; $y_2 = \frac{5-3}{2} = 1$

Most visszahelyettesítünk x^2 helyébe:

$x^2 = 4$ és $x^2 = 1$ innen

$x_{1,2} = \pm 2$; $x_{3,4} = \pm 1$

Ellenőrzés: helyettesítsük be az eredeti egyenletbe:

$x_1 = 2$; 16-20+4=0; helyes

$x_2 = -2$; 6-20+4=0; helyes

$x_3 = 1$; 1-5+4=0; helyes

$x_4 = -1$; 1-5+4=0; helyes

Az eredeti egyenlet gyökei, vagyis a megoldás tehát: 2; -2; 1; -1.

c. Korlátozás módszere. Limiting

Számos esetben a pontos megoldás helyett annak valamilyen specifikus eseteit határozzuk meg. Ilyenkor a problémát annak valamilyen jellemzője bizonyos értékei estére oldjuk meg! A korlátok az ilyen kifejezések, mint például a „kisebb", „nagyobb", „biztosan belefér", vagy ezek tagadása, stb. Például egy dátum felírásban a hónap rész nem lehet 12-nél nagyobb, mert csak 12 hónap van. A „nyomozásos" feladatok rendszeresen alkalmazzák ezt a módszert. Példa erre az alibi esete, vagyis nem tehette, mert akkor másutt volt.

3. Lista és kizárás módszere.

(Elimination)
Gyakran használt a mindennapi életben. Sajnos sokszor rosszul, felületesen, mert nincs eléggé egzaktul meggondolva az elhagyás. Ennek feloldására használjuk a listázást. Nevzetesen egy listában felsoroljuk az összes lehetséges esetet, megoldást. Logikai okfejtésel meghatározunk kizárandó részeket és ezután oldjuk meg a problémát!
Nagyon fontos! Az okfejtéssel megállapítjuk előre, hogy „mit követünk el" a kizárás révén és a kapott eredményeket ennek tükrében értékeljük. Más kizárással esetleg más eredményt kapunk!
Számos feladat ennél egyszerűbb és a kizárás csak arra korlátozódik, hogy az összes elméletileg lehetséges esetből kizárjuk azokat, amelyek a konkrét probléma esetén nem fordulnak elő és amelyeket logikai okfejtéssel meg tudunk állapítani.

Például, ha egy adattárban keresünk pullóveres, 35 évesnél fiatalabb, nem-dohányzó férfiakat, akkor azonnal kizárhatjuk a keresésből a nőket, amivel valószínűleg legalább megfeleztük a mennyiséget. Logikai okfejtés: a személyi nyilvántartások azonosítói mindig tartalmazzák a nemet és az azonosítón való keresés sokkal gyorsabb, mint a tartalom szerinti, gyorsabb az azonosítók táblázatában a keresés. Az összes többi kérdésre a válasz a bejegyzés tartalmában van és azt ki kell olvasni, ami sokkal tovább tart. Azt is vegyük figyelembe, hogy a keresett adatok milyen sorrandben vannak tárolva, mert evvel is időt nyerhetünk (nem kell fölöslegesen visszatérni az adat elejére minden egyes vizsgálatnál).

Másik példa: tudjuk Kovács Úrról, hogy Budapesten az Operaház mellett lakik és szeretnénk megtudni a vezetékes telefonszámát, amennyiben nem titkolja. Kinyitva egy telefon keresőt akár ezernyi Kovács nevűt találunk. Akkor jöhet a kizárásos módszer. Logikai okfejtés: mit tudunk?

1. az Operaház az Andrássy úton van, a Duna felől nézve a baloldalon.
2. a vezetékes telefonokról elég jó számítógépes adatbázis érhető el a telefontársaság oldalán.

Tehát

1. az Operaház a hatodik kerületben van (térkép).
2. Kovács Úr házszáma páros a házszámozás szabályai szerint: Budapesten a Dunával nem párhuzamos házak számozása a Dunától és a jobboldalon kezdődik – ott van az egyes szám - a következő a másik oldalon az első ház, majd így tovább az oldalak váltakozva következnek.
3. Kovács Úr postai irányító száma tehát 106x, de az Operaház a kerületben eléggé középen helyezkedik el, ezért eliminálhatjuk 0,1,2 és a 7,8,9 alszámokat.
4. A keresőben ezért elegendő a 1063, 1064, 1065, 1066 irányító-számokkal dolgozni.
5. Még ügyessebbek lennénk, ha segítséget használnánk, vagyis először megkeresnénk az Operaház irányítószámát és a második lépcsőben ezt írnánk Kovács Úr neve mellé.
6. Persze ez nem olyan biztos --logikai okfejtés ismét--, mert lehetséges, hogy a körzethatár éppen ott húzódik. Ennek kifejtése már topológiai feladat. Legyen házi feladat: annak megállapítása, hogy melyik megoldás rövidebb: kevesebb keresési próbálkozás.

4. Séma (minta, ismétlődés, sablon, motivum) keresés módszere.

(Pattern Search)
Ha egy problémamegoldás során rendelkezésünkre áll sok adat, akkor azokon - különböző elrendezésben - érdemes azonosságokat, ismétlődéseket, mintázatokat, más feladatokkal

hasonlóságokat keresni és találni. Ezekből logikai következtetések útján el lehet a megoldáshoz jutni. A séma lényegében kétféle, úgymint következetes (szisztematikus) ismétlődés, vagy egyszeri azonosság, hasonlóság más ismert esettel. A feladat mindig ennek felismerése.
Közismert például, hogy a jó sakkozók sok játszmát ismernek és alkalmaznak, ami az azonosság, hasonlóság elvén alapul.
Klasszikus példa a csempézés, ha tudjuk a a burkolandó felület méretét és a csempék nagyságát, valamint a kívánt mintázatot, akkor az ismétlődés alapján meghatározhatjuk a szükséges csempék számát.
Ha tudjuk a Nap, a Föld és a Hold járását, akkor meghatározhatjuk a holdfogyatkozás pontos idejét és módját, akár a földrajzi helyzettől függően is. Hiszen az égitestek mozgása ismétlődő sémát követ.
A sémák tehát előfordulhatnak bárhol, viselkedésben, érzékelésekben, absztrakciókban. Első feladatunk mindig ennek felismerése. De vigyázzunk, mert ezek összetévesztése igen gyakori hiba a gyakorlatban. Közismert a nagyság és a nagyságrend keverése, vagy a sebesség és a gyorsulás zavarai, a százalékok viszonyításának zagyválása, a séma felületes alkalmazása a skatulyázás, a helytelen logikai következtetések, főként az egyedi jelenségből az általánosítás eseteiben, és még sorolhatnánk.

Lássuk a példát!

1. A kiadott közlemény szerint a munkanélküliségi ráta 2%-al csökkent az elmúlt időszakban. Az ellenzék szintén autentikus szakértője szerint azonban a munkanélküliek száma növekedett 2%-al. Vajjon ki hazudik? Egy esetleges tévedésről most nem beszélünk!
2. Vegyük észre, hogy minden megállapítás az időszak utolsó napján érvényes értékről beszél, mert másképpen nincs értelme a szövegnek, hiszen az emberek, akikről szó van az időszakban folyamatosan léteztek! A változást az innen kilépők, illetve a belépők adják.
3. A munkanélküliségi ráta alatt az értjük, hogy hogyan változik a munkanélküliek aránya az összes munkaképeshez képest időszakról időszakra. Tehát a mostani érték az előző 98%-a, vagyis $0,98\frac{m_0}{ö_0}=\frac{m_1}{ö_1}$; ez adódhatott az összes foglalkoztatott és a munkanélküliek számának változásából külön, vagy együttesen. A valóságban ezek mind változnak.
4. Az ellenzék szerint a munkanélküliek 2%-al többen voltak az időszak végén, mint a kezdetén, tehát a munkanélküliségből kilépők többen voltak, mint a munkanélkülivé váltak, vagyis a belépők. Számszerűen: $m_1=1,02m_0$
5. Logikai következtetés ha $m_1>m_0$ és $ö_1<ö_0$, akkor lehetséges rátacsökkenés, tehát mindkét félnek igaza lehet, csak *nem ugyanarról* beszélnek.
6. Hehelyettesítjük be m_1-et az előzőbe: $0,98\frac{m_0}{ö_0}=\frac{1,02m_0}{ö_1}$, végig osztva m_0-val és rendezve: $ö_1=\frac{1,02}{0,98}ö_0$.

Tehát ha az összes foglalkoztatottak száma 1,02/0,98 arányban növekedett, akkor mindkét félnek igaza van!

5. Modell készítés módszere.

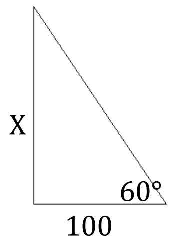
(Model, Diagram)
A matematika a valós világ modellezésének egyik módja amely hagyományosan egyenlet formájú. Egy problémához többféle modell létrehozása is lehetséges. Egy bizonyos modell kiválasztása valójában a modellkészítő tapasztalatától, tudásától függ. Sokban segít a problémamegértésben ha létre tudunk hozni fizikai modelleket, amelyek vizualizálisan is segítenek.
Példa: Öt személy van egy szobában, akik kezet fognak egymással, mindenki mindenkivel. Akkor hány kézfogás lesz összesen? Mennyi lesz *n* személy esetén
Célszerű egy vizuális modell építeni úgy, hogy lássuk kik fognak kezet. Ez egy táblázat lesz, ahol a sorok és az oszlopok egyaránt a személyek:

	I	II	III	IV	V
I		*i*	*i*	*i*	*i*
II	*i*		*i*	*i*	*I*
III	*i*	*i*		*i*	*i*
IV	*i*	*i*	*i*		*i*
V	*i*	*i*	*i*	*i*	

Az *i* jelenti a kézfogást. Önmagával senki sem fog kezet, ezért üresen hagyjuk. Számoljuk össze: minden sorban (oszlopban) négy van, tehát 5x4=20 kézfogás. Vegyük azonban észre, hogy minden kézfogás oda-vissza szerepel a táblában, ezért csak 20/2=10 kézfogás volt! Ez a matematika nyelvén egy diagonál – átlós – mátrix, amely szimmetrikus egy tengelyre nézve, azaz a tengely két oldalán lévők egymásnak tükörképei. Valóban, hiszen például az I-V kézfogással szemben az V-I található és így tovább, tehát mindegyik kétszer fordul elő. Általánosíthatjuk akkor a számításunkat tetszőleges, *n* számú személyre a kézfogások száma: $\frac{1}{2}\left(n^2-n\right)=\frac{n\left(n-1\right)}{2}$.

Másik példa: Kifizethető-e 1millió forint úgy, hogy minden pénznemből ugyanannyit adunk?
Először nézük meg a pénzeinket: 5, 10, 20, 50, 100, 200 forintos érmék és 500, 1000. 2000, 5000, 10000, 20000 forintos bankjegyek vannak. Legyen a darabszám x! Most már felállíthatunk egy egyenletet: 5x+10x+20x+50x+100x+200x+500x+1000x+2000x+5000x+10000x+20000x=1000000
38885x=1000000 átrendezve: x=1000000/38885 nem osztható maradék nélkül, tehát így nem fizethető ki! Érdekes, viszont, hogy 26x38885=1011010, azaz, ha minden érméből 26-ot adunk, kivéve egyegy darab tízezrest, ezrest, tizest, akkor egymilliót fizetünk ki.

Újabb példa vázlat, fizikai modell készítésével: Egy torony csúcsát tőle 100méter távolságra 60 fokos szög alatt látjuk. Milyen magas a torony?
Készítsünk ábrát! Innen látjuk, hogy ez egy derékszögű háromszöget alkot: egyik befogója 100m, amelyen található a derékszög és a 60°-os szög, a másik befogó a torony magassága.



Az erre érvényes szögfüggvény: tg 60°= x/100, innen x=100tg60.
$tg60=\sqrt{3}\approx 1,732$ táblázatból, vagy máshonnan,
tehát a torony magassága x=173,2 m.

6. Rendezéses módszer.

(Table, Chart, List)
Bonyolult feladatok megoldása esetén gyakran nem egyértelműen átláthatók az adatok, illetve azok lehetséges kapcsolatai, változatai. Ezért az adatokat valamilyen rendbe igyekezünk elhelyezni, hogy észrevegyük a kapcsolataikat, logikai összefüggésüket, lehetetlenségüket, stb. Ilyen rendezések legegyszerűbbike a közönséges lista, az adatok egyszerű sorrendje. Alkalmazhatunk táblázatokat is, ahol a két oldara felvett adatok egymás közötti relációját tüntejük fel és vozsgáljuk. Természetesen lehetséges három, vagy még több dimenzió használata is, amelyek kezelése nehezebb. Az adatokat hálózatokkal is kifejezhetjük, ha a kapcsolatok közötti folyamatok vizsgálata vezet a probléma megoldásához.

Példa: Két régen látott barát találkozik, az egyik matematikus. A másik azt mondja, mióta nem találkoztunk három gyerekem született éveik szorzata 36, összeg annyi, mint a házunk ablakainak a száma, amit te ismersz. Jól van mondja a matematikus, de ez nem elég, hogy kiszámítsam a korukat. Nos, akkor itt van még egy információ: a legidősebb gyerek kékszemű. Akkor már tudom mondta a matematikus. Vajon honnan tudta és mennyi a koruk?

1. Mit tudunk? Az adataink: abc=36, a+b+c=?, a legidősebb kékszemű.
2. Készítsünk táblázatot a lehetséges megoldásokról:

I.	II.	III.	a+b+c
36	1	1	38
18	2	1	21
12	3	1	16
9	4	1	14
9	**2**	**2**	**13**
6	**6**	**1**	**13**
6	3	2	11
4	3	3	10

Vegyük észre, hogy ha a matematikus ismerve a házat 38, 21, 16, 14, 11, 10 ablakról tudna, akkor már mondaná is az eredményt. Ezért a ház ablakainak száma 13 kell, hogy legyen, mert ez a bizonytalan, kettő van belőle. Nézzük ezt a két sort: ha a legidősebb kékszemű, akkor csak a 9, 2, 2 jöhet számításba, mert a másik sorban nincs legidősebb (6,6,2). Tehát a három gyerek 9, 2, 2 évesek. Ellenőrízzük: 9x2x2=36.

Egy másik példa: Mennyi idő alatt éri utól a 45km/ó sebességgel haladó jármű a 30km/ó sebességűt, ha az egy órával előbb indult?
Készítsünk táblázatot az adatokból:

autók/órák	1	2	3	4
30-as autó	30	60	90	120
45.ös autó	0	45	90	135

Az első óra végén a gyorsabb autó éppen indult, a második óra végére 45km-t tett meg, míg a harmadik végén 90-et. Ennyit tett meg éppen a lassabb jármű , tehát három óra múlva találkoztak.

Ha nem találtunk volna egyezést, akkor érdemes az időegységet finomítani az egyezés közelében – a nálánál kisebb és a követő nagyobb érték között egészen a várt pontosságig.

7. Képlet alkalmazása.

(Formula)
Ez az egyik leghatékonyabb eszköz, amely rendelkezésünkre áll, hiszen csak annyit kell tennünk, hogy a megtalált képletbe behelyettesítjük a probléma adatait, majd kiszámítjuk az eredményt. A képlet nem mindig implicit formában van, akkor azonos átalakítással juthatunk el a megfelelő kifejezésre.
Gyakori feladat a mértékek átszámítási feladata a különböző mértékegységek között, például az autók teljesítményénél lóerőhöz vagyunk szokva, azonban az új szabványok a kilowattot preferálják.
Kinézzük a könyvből, hogy 1LE=1,36kW,

1. Egy 80kW teljesítményű autó motorja hány LE-s? 1,36x80kW= 108,8LE ~ 109 LE
2. Egy 80LE-s motor hánykW-os? Ezt már nehezebb megoldanunk, át kell a képletet alakítani így: 1kW= 1LE/1,36 és innen 80LE/1,36=58,8kW ~ 59 kW

8. Kiszámolás módszere.

(Compute, Simplify)
Ilyen feladatoknál, a számolási szabályok alkalmazásával jutunk eredményre, vagyis a probléma közvetlenül, implicit, adott.
Példa: mekkora a téglatest térfogata, ha az oldalai 3,4, 5 méteresek?
A térfogat az oldalak szorzata: 3x4x5 = 60 m.
Egy kicsit bonyolultabb példa: igaz- e, hogy $\sqrt{8}+\sqrt{18}=\sqrt{50}$?
Alakítsuk át az egyes kifejezéseket: $\sqrt{2^3}+\sqrt{2.3^2}=\sqrt{2.5^2}$, kiemeljük a $\sqrt{2}$ -t, $2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2}$, vegyük észre, hogy ez osztható $\sqrt{2}$ -vel, marad $2+3=5$, tehát helyes az állítás.

~~~~~
~~~~~