Gödel-tétel.
Az eldönthetetlen problémákról.

Emlékezzünk, a természetes számok és a számelmélet része egy jól megalkotott axiómarendszernek, amely tartalmazza mindazt, amire csak szükség lehet és legjobb szándékunk szerint ellentmondás sincs benne. Fontos még, hogy minden állítás egy-egy jelsorozatot képez, azaz az axiómákat a szimbolikus logika nyelvén adtuk meg.
Rendeljünk e jelsorozatok mindegyikéhez egy-egy számot, például: a matematikai és logikai jeleknek feleltessünk meg sorban törzsszámokat. A számokhoz elég az 1 is, mert a többi előállítható egyszerű hozzáadással, így a 2 > 1 + 1, a 3 > 1 + 1 + 1, és így tovább. Az *egyenlőség* jelnek feleljen meg a 2, a *nem* jelének a 3, az *összeadás* jelnek az 5 és így tovább. Tulajdonképpen mindegy, hogy milyen sorrendben tesszük. A jelek után feleltessünk meg a rendszer állításaiban előforduló nem ismert értékeket jelző betűknek, x, y, ..., stb., további törzsszámokat.
Az eredmény az alábbi táblázat lesz:

1 --> 1
= --> 2
¬ --> 3
+ --> 5
- - - - - - - -
x --> 19
y --> 23

Például tehát kiolvasható, hogy az *1 = 1* formulának az *1, 2, 1* számhármas felel meg. Összetettebb kifejezés esetén hosszabb lesz a számsor.
Képezzünk a számsorból egyetlen számot, olyat, amelyikből alkalmas eljárással vissza kaphatjuk az eredetit! Legyen ez az eljárás a törzstényezőkre bontás: vegyük sorban a primszámokat mindegyiket akkora kitevőre emelve, amekkorák a számsorunk tagjai.
Példánkban vesszük a *2, 3, 5* törzsszámokat mindegyikét sorban akkora kitevőre emelve, amekkorák 1, 2, 1 számhármasunk tagjai: $2^1.3^2.5^1 = 10.3^2 = 10.9 =90$. Az 1 = 1 formulának tehát a *90*-es számot feleltetjük meg. Az eredeti számsort könnyen fel lehet ismerni, ha törzstényezőire bontjuk: $90=2.\ 45 =2.3.15=2.3.3.5=2^1.3^2.5^1$. A számsorunk tehát három elemből áll és értékei, rendre: 1, 2, 1. Ezt a számhármast az eredmény táblázatból visszafordítva az 1 = 1 formulát kapjuk.
Bizonyítás.
(1) A szám képzése a törzstényezőkre bontás fordított művelete.
(2) A hatványozás a számsor eredeti sorrendjében a primszámok növekvő sorrendjében történik, a fordított művelet nem változtat ezen.

Bármely állításnak, amelyet a táblázat segítségével kódolunk és a fenti úton átalakítunk egy-egy szám felel meg.

A rendszer minden állításának egy-egy szám felel meg így. És hasonlóan feleltethetünk meg minden bizonyításnak is egy-egy számot. Hiszen egy bizonyítás - formailag tekintve - nem egyéb, mint néhány állítás egymásutánja (ahol is az utolsó állítás az előzőkből következik). Az állításoknak pedig már számokat feleltettünk meg, és így, ha például három állításból áll egy bizonyítás, akkor egy számhárrnas fog megfelelni neki. Egy számhármast pedig teljesen az

előbbi módon olvaszthatunk össze egyetlen számmá úgy, hogy e számból bármikor fel is lehet ismerni az alkotórészeit: csak meg keíl csinálnunk a törzstényezős felbontását.
Ha például egy rettenetesen nagy számról már tudjuk, hogy valamelyik megfeleltetésben előfordult, továbbá volt olyan angyali türelmünk, hogy megcsináltuk a törzstényezős felbontását és ezt kaptuk: $2^{9000\ 000\ 000\ 000\ 000}.3^{90}$, akkor először is látjuk, hogy a kitevők nem törzsszámok, tehát nem egyszerű állításnak felelt meg ez a szám, hanem bizonyításnak. Mégpedig olyan bizonyításnak, amelyben mindössze két állítás szerepelt: azok, amelyeknek a kitevőkben fellépő 90 000 000 000 000 000 000 illetőleg 90 felel meg. Ha e két számot törzs tényezőkre bontjuk, visszanyerhetjük belőlük a megfelelő állításokat. Az elsőben tizenkilenc 0 van, tehát ez $9.10^{19}=3^{2}.2^{19}.5^{19}$ hiszen 10 = 2.5; az alapokat nagyság szerint rendezve: $2^{19}.3^{2}.5^{19}$ a kitevőkben tehát a 19, 2, 19 számhármas szerepel. A második szám felbontása már ismerősünk: $90 = 2^{1}.3^{2}.5^{1}$, tehát ez az 1, 2, 1 számhármasból épült fel. Megismétlem a szótárt:

1 --> 1	Kiolvashatjuk belőle, hogy az első szám-
= --> 2	hármas, azaz
¬ --> 3	19,2,19
+ --> 5	az x = x
- - - - - - -	formulának, a második számhármas, azaz
x --> 19	1, 2, 1
y --> 23	az 1=1
- - - - - - - -	formulának felel meg.

Ez a bizonyítás tehát mindössze ennyit mondott: abból, hogy tetszés szerinti x mellett x=x, az következik, hogy 1=1 .
Ez bizony még elég szánalmas kis bizonyítás *és* már ehhez csillagászati nagyságú szám tartozott; képzelhető, mekkora szám felel meg egy valamirevaló bizonyításnak.
De a lényeges az, hogy tudjuk: rnégis megfelel neki valami határozott szám, és ebből a számból - ha egy emberélet alatt nem is, de legalább elvben - rekonstruálni lehet a bizonyítást.
Így lehet lefordítani a rendszer formuláit és bizonyításait bizonyos természetes számokra. De mire jó ez?
A metamatematika a rendszert kívülről vizsgálja ; az ő állításai a rendszer ilyen és ilyen alakú formuláiról, bizonyításairól szólnak. Most ezeket az állításokat a szótár segítségével át lehet fogalmazni úgy, hogy ilyen és ilyen törzstényezőkkel rendelkező természetes számokról szóljanak.
Például, amint a rendszer jeleivel felírható formulákat vizsgálgatja a metamatematika, megállapíthatja, hogy az 1 =1 és a ¬(1=1) jelsorozatokkal óvatosan kell bánni, mert egyik a másiknak a tagadása. Már láttuk, hogy 1=1 –nek $2^{1}.3^{2}.5^{1}=90$ felel meg.
A szótár szerint (ha eltekintünk attól, hogy a zárjelek is jelek, (ezeknek is bizonyos számokat kellene valójában megfeleltetni), akkor:

1 --> 1	a
= --> 2	¬ (1=1)
¬ --> 3	formulának a
+ --> 5	3, 1, 2, 1
- - - - - - -	sorozat felel meg, vagyis - az első négy
törzsszám	2, 3, 5, 7
lévén – a	$2^{3}.3^{1}.5^{2}.7^{1}$ szám.

Számítsuk ki ezt is: $2^{3}.3^{1}.5^{2}.7^{1}=2.2.2.3.5.5.7=10.10.2.3.7=4200$
Állítsuk még egyszer egymás mellé a törzstényezös felbontásokat: $90 = 2^{1}.3^{2}.5^{1}$ és $4200=2^{3}.3^{1}.5^{2}.7^{1}$.

Tehát azt a metamatematikái állítást, hogy *„az* 1=1 és ¬ (1=1) *alakú jelsorozatok egymás ellentétét fejezik* ki", így lehet átfogalmazni: „90 és *4200 olyan számok, hogy az utóbbinak* törzs tényezős *felbontása* 2^3*-al kezdődik, az ezután következő törzsszámok kitevői pedig sorra ugyanazok, mint a 90 törzstényezős felbontásában szereplő kitevők."*
Ebben az utóbbi mondatban már nyoma sincs metamatematikának, ez tiszta számelméleti állítás. A vizsgált rendszer pedig éppen arra való, hogy a számelméleti állításokat meg lehessen fogalmazni benne. Tehát ezt a mondatot is fel lehet írni teljesen a vizsgált rendszer jeleivel úgy, hogy egyetlen szó sem marad benne. Egyike lesz a közönséges, szürke jelsorozatoknak; nem látszik meg rajta, hogy milyen kétértelmű. Pedig kétértelmű: kétféle szöveg is kiolvasható belőle. Az egyik a számelméleti szöveg, ami a rendszer minden formulájából kiérezhető, ha visszagondolunk arra, hogy milyen tartalmuk volt eredetileg a jeleknek; a másik az, amit a benne megtestesített metamatematikai állítás mond ki.
És amint Gödel az ilyen kétértelmű jelsorozatokkal és a nekik megfelelő számokkal játszogatott, rábukkant egy számra – nevezzük Gödel-számnak (valójában pontosan tudjuk, hogyan épül fel törzstényezőkből, de a kiszámításához egy emberélet sem volna elég) - és észrevette, hogy ez a következőket adja, ha az előbb tárgyalt mondat mintájára a rendszer jeleivel írjuk fel ezt a metamatematikai állítást:
„A Gödel-számnak megfelelő formula nem bizonyítható be a rendszerben"
- és megnézzük, hogy az így nyert formulának a szótár szerint milyen szám felel meg, ámulva fogjuk tapasztalni, hogy éppen a Gödel-szám. Tehát a „ Gödel-számnak megfelelő formula": maga ez a formula, így kereken ezt mondja ki az egyik értelmével:
„Én magam nem vagyok bizonyítható."
Értsük meg, ez nem játék a szavakkal, nem szofizma, egy közönséges szürke formula van előttünk, egy letagadhatatlan jelsorozat, olyan mint a többi. Csak ha megnézzük a szótárunk segítségével, hogy miféle kétértelműséget csempészett bele ebbe a jelsorozatba a metamatematika, akkor vesszük észre, hogy ártatlan képével ezt a furcsa szöveget dúdolja:
„Én nem vagyok bizonyítható."
Nem csoda, hogy ez a formula eldönthetetlen a rendszerben, bármily ártalmatlan számelméleti állítást fejez is ki a másik értelmévé!. Mert ha bizonyítható volna, ez ellenkezés be kerülne azzal, amit a formula metamatematikát értelme mond ki, hiszen ez éppen az, hogy ő nem bizonyítható. Ha pedig megcáfolható volna, ez a cáfolat éppen megerősítené az 6 metamatematikái állítását, hogy t!, nem bizonyítható; tehát éppen a cáfolat bizonyítaná őt be.
Sem bizonyítani, sem megcáfolni nem lehet: eldönthetetlen.
Ismét hangsúlyozom: ha nem jut eszünkbe a szótár, ez egy közönséges, szürke formulája a rendszernek: összeadásokra és szorzásokra vonatkozó ártalmatlan számelméleti állítás. Ilyen alakú eldönthetetlen formulák létezését bizonyította be Gödel minden valamirevaló rendszerben. Nincs kizárva hogy közéjük tartozik például a Goldbach-sejtés is: lehet, hogy ezt azért nem sikerült mindmáig eldönteni, mert ha axiómarendszert hámoznánk ki mindazon eszközökből, amikkel eddig e sejtés körül kísérleteztek, akkor a szótáron át éppen ő dúdolná:
„Én nem vagyok bizonyítható a rendszerben."
Ugyanez vonatkozik bármely eddig el nem döntött problémára; e lehetőséggel szembe kell néznie minden matematikusnak.
Elképzelhető volna még egy ellenvetés: mindez csak az axiómarendszerek hiányossága. Bizonyára el lehet dönteni az ilyen Gödel-problémákat is, ha nem kötjük magunkat valami axiómarendszerhez. Nos hát Church olyan problémát is konstruált, amely a ma elképzelhető matematikai okoskodások egyikével sem dönthető el, egészen függetlenül attól, hogy következtetéseink valamilyen axiómarendszer keretei közé szoríthatók-e.

Itt kell befejeznem az írást: a mai matematikai gondolkodás korlátaiba ütköztünk. Korunk a tudatosítás kora, e téren a matematika is megtette a magáét: ö maga tárta fel saját képessegeinek határait.
De vajon végleges akadályokba ütköztünk-e? A matematikatörténet minden eddigi zsákutcájából volt kivezető út. Church bizonyításának is van egy igen elgondolkoztató pontja: pontosan meg kellett fogalmaznia, hogy mit tekintsünk „ma elképzelhető matematikai okoskodás”-nak, ha erre a fogalomra a matematika eljárásait akarta alkalmazni. Amint valamit megfogalmazunk, már körül is határoltuk. És minden kerítés szűk. A felbukkanó eldönthetetlen problémák kibújnak alóla.
A kereteket majd bizonyára tágítani fogja a jövő fejlődés, ha ma még nem is látjuk: hogyan. Az örök tanulság: a matematika nem sztatikus, zárt, hanem élő, fejlődő valami; bárhogyan próbáljuk zárt formába merevíteni, talál magának rést: elevenen robban ki belőle.