A Neumann hierarchia és univerzum.

Létesítés.
Emlékezzünk, bármely halmaznak lehetnek halmaz elemei, valamint létezik az üres halmaz, amelynek nincsen eleme.
Képezzünk sorozat halmazokat kindulva az üres halmazból, az első tartalmazza az üres halmazt, majd az azután következő halmazok rendre tartalmazzák az össze előző halmazokat és így tovább a végtelenségig:

| | | |
|---|---|---|
| 0: | {} | az üres halmaz |
| 1: | { {} } | halmaz, amely tartalmazza az üres halmazt |
| 2: | { {}, { {} } } | halmaz, amely tartalmazza az összes előzőt |
| 3: | { {}, { {} } , { {}, { {} } } } | és így tovább a végtelenségig... |

Vegyük ezeknek a halmazoknak a teljes – végtelen – gyűjteményét és alkossunk belőle egy halmazt. Ez a halmaz a készlete az összes véges sorrendnek (finite ordinals).
Ezt nevezzük *Neumann-hierarchiá*nak.
Tulajdonképpen tekinthetjük ezt egyben a természetes számok halmazelméletei definiciójának is.
Bizonyítás.
Vezessük be az alábbi egyszerűsítő jelölést:
(1) Jelöljük az üres halmazt így: 0.
(2) Az üres halmazt tartalmazó halmaz akor {0} és jelöljük így: 1.
(3) A következő halmaz akkor {0,1}=2 és {0,1,2}=3 és így tovább.
(4) Általában $n \in \mathbb{N}$ esetén n+1= {0,1,2,3,...,n}

Tehát minden sorszám egy halmaz, amelynek tartalma az összes nála kisebb sorszám. Másként fogalmazva minden egymást követő sorszám az előző sorszám hatvány halmaza.
Következmény.
Ez az architektúra egy Peano-axiómáknak megfelelő modell, érvényes tehát az aritmetika is, amely azonos a véges sorszámok aritmetikájával. Ez azért érdekes, mert a Neumann architektúra továbbfejlesztése ennek nem mond ellent, sőt feltételezi. Ennek fontosságát később látjuk.
Továbbfejlesztés.
Láttuk, hogy a Neumann architektúra az összes véges sorrend halmaza, amelyben minden elem halmaz, az összes előző sorrendje. Tekintsük most ennek a hatvány halmazát, amely tulajdonképpen szintén egy sorrend – amely túl van a véges sorrenden, tehát nem soronkövetkező, hiszen ilyen már nincs! Mégis sorrend, mert ugyanúgy képeztük, ahogy az előzőket. Nevezzük határsorrendnek és jelöljük ω-val. Mi is ez? Tulajdonképpen ez is egy sorszám, amely a legnagyobb véges után következik, vagyis ez az első végesen túli szám: transzfinit-számnak nevezzük.
Most utalok vissza korábbi következményünkre: mivel semmi olyat nem tettünk, tehát itt is, erre is érvényesek az aritmetika szabályai, azaz léteznek és érvényesek például az ω+1, vagy az ω.ω és az $\omega^{\omega}$ kifejezések.
Ílymódon az ω-val folytathatjuk a mostmár transzfinit sorrendek képzését, sőt eljuthatunk egy transzfinit határsorrendhez is, és így tovább a „végtelenségig” és azon túl!
Halmazok egész univerzuma konstruálható ílymódon, amelyek örökölt jólrendezési tulajdonsággal rendelkező halmazok teljes osztálya és természetesen *Neumann univerzum*nak nevezzük.