Beszélgetések a matematikáról: Játék a végtelen?

I. rész

> *„Felületesen nem lehet matematikát olvasni, a kényszerű absztrakció mindig bizonyos önkínzással jár, és matematikus az, akinek ez az önkínzás örömet okoz. Még a legjobb népszerű könyvet is csak azok fogják követni tudni, akik egy bizonyos fokig vállalják ezt. Akik vállalják a keserves silabizálást mindaddig, míg a képlet értelme meg nem világosodik előttük.”*
> *Péter Rózsa: Játék a végtelennel*

Bevezetés

Közismert, hogy igyekszünk minden általunk alkotott szabályt végérvényesnek, univerzálisnak, örökkétartónak tartani és az így kimondottakat minden további lépésben feltétlenül igaznak tekinteni és hajlamosak vagyunk minden további cselekedetünket – köztük a szabályalkotást is – ezekkel a korábbi tézisekkel alátámasztani. Tehát azt állítjuk és az intuicióink erre késztetnek bennünket, hogy hozott szabályaink, felismert törvényszerűségeink határtalanul igazak és térben, időben végtelenek.

Valóban kényelmes álláspont ez a végtelenség! A végtelen hiánya esetén a dolog korlátos és a szabály, törvényszerűség felállításakor meg kellene határoznunk az érvényesség korlátait is. Aki valaha is résztvett alkotó munkában tudja, hogy a legnehezebb minden alkotásnál annak érvényességi hatályát megmutatni. A probléma kettős: egyrészt a dolog soha sem izolált és kölcsönhatásban van más, itt nem vizsgált dolgokkal, másrészt azonnal felmerül a kérdés, hogy mi van, lesz a korlátokon túl.

Intuicióink helyettesítésére adott lehet az axiomatikus módszer, amikor meghatározzuk azt a „környezetet”, vagy ha úgy tetszik korlátokat, amelyben érvényesek lehetnek alkotásaink. Más kérdés, hogy ezek további absztrakciót jelentenek és még messzebb visznek a valóságtól. Univerzumunkban egyre több olyan feladat, probléma merül fel, amelyek nem oldhatók meg spekulációk nélkül és az így nyert tételek, sejtések utóbb kerülhetnek valós igazolásra. Ez ma a járható tudományos szintézis.

A végtelen örökérvényű kiváncsisága az emberiségnek, „igazi” megoldás még eddig nem sikerült találni. Az egyik legreménykeltőbb szándék vezetett a halmazelmélet kialakulásához, majd természetesen további elméleti eljárásokhoz és talán még fog vezetni. Úgy tünik, hogy a végtelen végtelen tered ad a kutatásoknak. Ebben a tanulmányban megkisérelek áttekintést adni a végtelennel összefüggő kutatásokról, eredményekről, felfogásról.

Kérdéseket a halmazelmélet segítségével fogalmazom meg, úgy, hogy miél szélesebb körben áttekinthető, megérthető legyen.

Itt vannak például a végtelen sorozatok, a határértékek, amelyekkel bizonyos esetekben tudunk bánni, de nincsenek általános megoldásuk. A kérdés tehát, hogy a halmazelméleti eredmények alkalmasak-e, jók-e végtelen halmazok esetében is? *Végtelen egy halmaz, ha elemeinek száma végtelen.*

Ha a végtelen halmazhoz további elemeket adunk, akkor nagyobb lesz a halmaz, vagy mégsem? Ha nagyobb, akkor mennyivel? Aztán a végtelen halmaznak van-e részhalmaza és az mekkora? Szóval mindjárt baj van a halmaz aritmetikájával, legalábbis a végtelen esetében és ha baj van, akkor az egész kérdésessé válik. Ráadásul más problémák is felmerültek – logikai ellentmondások - azok tárgyalása nem témánk ebben a tanulmányban.

Kérdések és kiváncsiskodás.

A technika, a tudomány, az alkotói folyamatok fejlődése, változása nem áll meg és mindig születnek újabb eredmények, ez a matematika területén sincs másként, így a végtelen kérdése is foglalkoztatja a tudós közvéleményt.

Tekintsük át, mit is tudunk a végtelenről és azt is, hogyan bánunk vele, no meg egyáltalán minek is van rá szükségünk.

Már a kisgyerek is tudja, hogy a számolás sohasem fejezhető be: mindig „hozzá lehet adni még egyet" – azt mondjuk, hogy végtelen. Aztán azt is hamar megtanuljuk, hogy vannak olyan geometriai mértékek, amelyeket nem tudunk pontosan kiszámolni, kifejezni a szokott számainkkal akármilyen pontossággal végezzük a számolást, mindig egy kicsivel, - azt mondjuk végtelenül kicsivel – kevesebb, vagy éppen több lesz. Tehát gyorsan megtanuljuk és megértjük a nagyon-nagyon nagy és a nagyon-nagyon kicsi fogalmát: végtelenül nagy és végtelenül kicsi – így mondjuk.

Rendben van, de mégis mekkorák ezek és hogyan lehet őket használni, hogyan lehet velük számolni? Ha a végtelen nagyhoz, vagy a végtelen kicsihez hozzáadunk, vagy kivonunk belőle valamennyi végeset az összesen mennyi lesz? Vagy végtelen meg végtelen az két végtelen? Akármilyen nagy, vagy kis számokkal, mint egységgel, éppolyan módon számolunk, mint a természetes számokkal – így tanultuk és bizonyították eleink. Ha a fényév, vagy a gigabájt az egységünk, attól a számolás módja nem változik! Érezzük ugyanakkor, hogy a végtelen esetében ez nem működik!

Ha valami véges, akkor van korlátja, ameddig „ér", például a természetes számok egy véges részhalmazában mindig van legalább egy legnagyobb és legalább egy legkisebb természetes szám (bizonyítás). Tehát azt mondatja velünk az intuiciónk, hogy ha valami véges, akkor van széle, pereme, korlátja – ahol véget ér. Ha valaminek nincsen „ilyenje", akkor az nem lehet véges, azaz végtelen!

Régóta tudjuk, hogy ez az intuiciónk téves, hiszen például a Föld tudományok azt a képtelenséget állítják, hogy a Föld véges és mégsincs széle, nem tudjuk lelógatni a peremén a lábunkat. Ha nincs vége, akkor végtelen - tanultuk máshol!

Ez a geometria gömbje, mert a Föld ilyen: akármerre mész mindig visszajuthatsz a kiinduló pontba anélkül, hogy visszafordulnál. Ez egy „végnélküli" világ! Persze sok más ilyen paradox idomot ismerünk, nem csak test, de sík formájában is – a Mőbius szalag eléggé közismert példa.

Akkor a világunk véges, vagy végtelen, esetleg paradox idomú? Kiséreljük meg elgondolni!

1. A világunkban a létrejövés, a megjelenés, az elmúlás, az eltünés természetes jelenségek. Minden valahol, valamikor keletkezik és egy idő után megszünik. Ennek bármilyen *ellentmondás*a csak úgy lehetséges, ha a dolog a végtelenből jönne, oda térne vissza.

2. Vajon az idő mikor kezdődött és mikor van, lesz vége? Vagy ez csak az ember képzeletének szüleménye: bármikor kezdhetünk időt számlálni és bármikor abbahagyhatjuk, ez tökéletesen megfelel a szemléletünknek. Az idővel tetszésünk szerint bánhatunk, „pusztán" csak annyit kell tudnunk, hogy az idő sorrendjében megfigyeltek nem fordíthatók visssza, talán ugyanúgy meg sem ismételhetőek és ami megtörtént az nem változtatható meg.

3. Az időhöz mértéket találtunk ki és a természet adott ehhez fogodzót: nappal-éjjel, hold, csillagok, majd mindenféle ember alkotta szerkezetek. Az időmérés tehát véges, míg az időről nem állapíthatunk meg ilyet! A végtelen idő az örökkévalóság? Aztán itt van a rövid idő kérdése: van-e legrövidebb? Bármily furcsa, de *a folyamatosság és a folytonosság értelmezése* enélkül nem lehetséges. Ha van legkisebb egységünk, akkor nem tudjuk megmondani, hogy egy dologgal mi történik ezen egység ideje során, tehát a jelenség szakaszos lesz, csak ilyen „ugrásokkal", kihagyásokkal tudjuk meghatározni. Márpedig folytonos csak az lehet, amelyről tudjuk, hogy az adott pillanathoz bármilyen kis távolságra is „ugyanúgy viselkedik", szóval tudjuk hogyan. Ha nem így van, akkor csak azt mondhatjuk, hogy *elvárjuk, azt hisszük, feltételezzük, úgy gondoljuk, eddig mindig így volt, stb.* Megint egy újabb problémába ütköztünk a végtelen területén, a folytonosság általános érvényű meghatározása problémájába.

Tehát azt látjuk, érezzük, sőt tudjuk, hogy a végtelen esetében már nem követhetők addigi módszereink, azok másként működnek, szóval beleütközünk intuicióink korlátaiba! Valahogyan mások a kisebb, nagyobb, egyenlő fogalmaink és nem érvényes a megszokott aritmetika sem.

Talán a korlát, a másság nem a dolgoknál van, hanem bennünk, a megszokásainkban. Ha a dolgok nem változtak, akkor nekünk kell másként gondolkoznunk. Ha a szemléletünk nem segít, bízzuk magunkat a szellemünkre: alkossunk végtelent, amely „gyümölcsözzön és sokasodjon és töltse be a Földet" – a tudományt (Mózes I. ..?).

Az alkotásból az irodalom is kivette a részét.

Jonathan Swift (1667-1745) így magyarázza nekünk:

Tudós könyvekben ez áll:
Bolhát kisebb bolha zabál,
E kisebbet űzi hasonló fátum,
S így megy ez ad infinitum!

Tóth Árpád a némileg szomorúbb oldalát tekinti:

Ó, jaj, barátság és jaj szerelem!
Ó, jaj az út lélektől lélekig!
Küldözzük a szem csüggedt sugarát,
És közöttünk a roppant, jeges űr lakik!

On-line konferencia.

A közelmúltban érdekes on-line konferencia-sorozat kezdődött a University of Cambridge gondozásában, amelynek kérdése: létezik-e végtelen a természetben? Filozófusok, kozmológusok, fizikusok, matematikusok mondjuk el több-kevesebb tudományos bázisra támaszkodva véleményünket, elképzelésünket. Bizonyítékunk nincsen sem a világmindenség végességére, sem végtelenségére, minden próbálkozásunk spekuláció és nem természettudományos igazság. A legtöbb fizikus az Univerzumunk, keletkezését a Big bang-el, mintegy 13,7 milliárd évvel ezelőttre érti, amelynek számos jele van és a relativitáselmélet állításaival is összhangban van. Az ismert állandók – a fénysebesség és mások mutatják, hogy az Univerzumunknak volt kezdete, van némi folytonossága és vannak korlátai. Ez azonban felveti egy ciklikusság gondolatát, nevezetesen, a mi Univerzumunk mellett, vagy előtte-utána újabb, másik univerzumok lehetségesek. Mindenesetre a természettudományok alapját képező mérhetőségi elvbe illeszkedő nagyságokkal találkoztunk eddig kizárólag, legyenek azok akármilyen nagyok, vagy éppen parányiak. Ha találkozunk méretlenekkel, akkor azokat éppen csak nem mérték még meg, azok mérhetőek – mensurabilisek.

Néhány szót kellene még fordítanunk az időre, az idő természetére, amelyről mindannyiunknak a megállíthatatlansága, az egyenletessége, az irreverzibilitása, visszafordíthatatlansága jut eszünkbe. Vajon létező-e, van kezdete és van vége? Vajon van-e legrövidebb és melyik létezik, az idők végezete, vagy örökkévalósága.

Eddigi megállapításunk tehát az, hogy a mérhető Univerzumunk véges: térben és időben egyaránt! Állításunk eleget tesz a különböző irányzatoknak: a materialisták anyag elsőbbségi elve érvényesül és az idealisták számára is csak annyi a megszorítás, hogy eszméjük, vagy az istenség mérhetetlensége, örökkévalósága a világunkon kívül található. Egyetértés van tehát, hogy az Univerzumunk, benne a fizikai világképünk, a relativitás-elmélet ellentmondásmentes.

Megállapításunkból azt a következtetést is levonhatjuk, hogy *a végtelen és fogalma emberi spekuláció, gondolat*, amely köznapisága mellett mégis nehezen érthető, értelmezhető, mégis jól alkalmazható. A végtelen a tudásra vágyás – a matematikosz – örökös tárgya, témái kezdetektől fogva a legnagyobbnál is nagyobb-, a legkisebbnél is kisebb- és a folytonosság fogalmak minél szigorúbb és pontos magyarázata, megértése.

A végtelen forrásai

1. Az *idő* természete: irreverzibilis, egyenletes folyamat.

2. A terjedelem *határtalan osztás*a, és a fordítottja, a határtalan sokszorozás

3. Világunkban a létrejövés, a megjelenés, az elmúlás, az eltünés természetes jelenségek. Ennek bármilyen *ellentmondás*a csak úgy lehetséges, ha a dolgok a végtelenből jönnek, oda térnek vissza.

4. Minden végesnek van *korlát*ja, az, ami a dolog után van. Tehát minden után mindig van valami: ez éppen a korlátja, ami tőle különbözik.

5. Az emberi *kiváncsiság* ott van a fejekben és ez a végtelen kérdéseire is irányul. Nem változik, amíg a kiváncsiság onnan nem távozik.

6. A tudomány kényelmessége, mert szabályaink, a felismert törvényszerűségek határtalanul igazak, vagyis térben és időben végtelenek. A végtelen hiánya esetén a dolog korlátos és a szabály, törvényszerűség felállításakor meg kell határozni az érvényességi korlátokat is! A szabályok, törvényszerűségek, tehát nem „örökkévalóak", végesek, fel kell tennünk, hogy bizonyos korlátokon túl másként alakulnak, alakulhatnak. Az axiomatikus módszer éppen ezt tükrözi! Az axiómákkal meghatározzuk azt a környezetet, vagy ha úgy tetszik korlátokat, amelyekben érvényesek lehetnek alkotásaink, dolgaink.

Tehát összefoglalva a végtelenre szükségünk van, akár véges, vagy végtelen az Univerzumunk, akár létezik végtelen mennyiség benne, akár nem. A végtelennel foglalkoznunk kell és ezt teszi az emberiség a történeti idők kezdete óta. Ebben a tanulmányban ezeket az eredményeket kívánom összefoglalni, áttekintést adni, bemutatni az elért eredményeket és rámutatni a foloytatás némely lehetőségére.

A végtelen történeti áttekintése.

1. Ókor

Ismereteink ie. 500-300 körüli évekről szól. Leukippos, eleai Zenon, Demokritos, Platon, Aristoteles, Euklides, Archimedes több kevesebb fennmaradt műveiből származik.

Aristoteles (ie. 382-322) a Physics könyvében (3. könyv, 6. fejezet) így ír: A végtelen létezési módja legáltalánosabban az, hogy egy dolog mindig vehető egy másik után úgy, hogy minden ilyen dolog mindig véges és különböző. Egy példa erre a számok köréből: egy szám mindig hozzáadható egymás után egy sorozatban, amely 1, 2, 3, ... kezdődik, de a hozzáadási eljárás nem fejeződhet be, nem merülhet ki.

Egy másik példa osztással: $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \ldots$ osztás újból és újból elvégezhető, az osztási eljárás nem merül ki, nem fejeződik be.

Tehát a végtelen az, ha mindig van valami saját maga után! Ez az értelmezés egyaránt érvényes a végtelen nagy és a végtelen kicsi irányában.

Aristoteles megállapítása számos kérdést vet fel: A példákban a lépések diszkrétek. Vajon mekkorák ezek? Létezik-e legkisebb lépés, vagy folytonossá válik ez az egymásutániság? A második példánál láttuk, hogy létezik végtelen kicsi mennyiség is, tehát értelmezhetjük a folytonos fogalmát. Aristotelesnél a CONTINUA, a folytonos mennyiségek a vonal. a sík, a test, a kiterjedés, a mozgás, az idő, a tér, de a számok és a beszéd is folytonos. Más megfogalmazásban az idő és a tér, már létezésük okán folytonosak olyan értelemben, hogy részeik *„csatlakoznak egymáshoz valamilyen közös határon"*. A diszkrét részek nem rendelkeznek ilyen tulajdonsággal.

Ügyes megfogalmazás ez, mert elkerüli az atomok, az oszthatatlanság problémáját, sőt éppen a végtelen oszthatóság a folytonosság ismérve. *Ez az egyformaság tétele – isomorphism thesis.* Ennek következménye lenne, hogy csak az Egy létezik a folytonosság miatt, amely oszthatatlan, pedig nyilvánvaló, hogy a világunk osztható részekből áll. Az ellentmondás feloldása az atom, a legkisebb rész, amely már az oszthatatlan, bevezetése. Az atom tehát nem folytonos, hanem diszkrét mennyiség, azt mondjuk, hogy a világunk atomokból tevődik össze (Leukippos, Demokritos, eleai Zenon, ie. 500-370). Tulajdonképen ez *az első fizikai modellünk*.

Aristoteles írásaiban ezt továbbfejleszti. A világban a – Levegő és a Tűz – kiterjedésnélküli oszthatatlanokból álló continuum, amely rugalmas és ezért abban az impulzusok hullámként továbbítódnak, míg a világ többi része – a Föld és a Víz – kiterjedt oszthatatlannal bíró continuum, vagy atomos, diszkrét.

A gyönyörű tétel és a magyarázat, amely önmagában is kétségeket támasztott a dualitásaival – kiterjedt és kiterjedésnélküli continuum, potenciális és aktuális végtelen. Azt állítja, hogy, például a természetes számok, mint egy teljesség *potenciálisan végtelen* abban az értelemben, hogy bármely véges sorozatához található nála nagyobb véges sorozat, azonban aktuálisan csak véges számot tudunk leírni. Az *aktuális végtelen* tehát kétséges.

A kétségeket Euclides, majd Archimedes tovább fokozta. Az Elemekben axiómaként bevezetésre került pont és vonal fogalma során a végtelen oszthatóság problémája ismét előkerült. Ha a pont kiterjedés nélküli spekuláció, akkor nem létezik olyan mennyiségű pont, amely vonalat alkotna. *A végtelenben tehát nem érvényesek a véges fogalmak*, vagy másként kell értelmezni azokat.

Ezeket a határokat keresi az archimedesi folytonosság, amelynek eredete már Euclidesnél, az Elemek V.8-ban megtalálható és így néz ki: *a* és *b* mértékek olyan aránnyal viszonyulnak egymáshoz, hogy *a*-t elég sokszor vesszük, akkor az meghaladja *b*-t, azaz *na>b*.

Mai szokásunk szerint ezt így fogalmaznánk:

$$(\forall a,b)(\exists n \in \mathbb{N})\left[a < b \rightarrow na > b\right]$$

Archimedes ezt kiterjeszti és pontosabban fogalmazza meg:

Bármilyen nem egyenlő vonal, felület, test közül, melyek egymással összemérhetőek és a nagyobb meghaladja a kisebbet *[a>b]* egy bizonyos mértékkel *[b-a]*, amelyet, ha elég sokszor veszünk *[n(b-a)]*, akkor az túl nőhet bármilyen megadott *[c]* mértéket *[n(b-a)>c]*.

$$(\forall a,b,c)(\exists n \in \mathbb{N})\left[a < b \rightarrow n(b-a) > c\right],$$

tehát ha elég sokszor vesszük két mérték bármilyen kicsiny különbségét, az meghalad *bármilyen tetszőleges nagy – végtelen - mértéket*. Pontosan mi köze van ennek a végtelenhez, azt némi átalakítás után már világosan látjuk:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N})\left[n\varepsilon > 1\right],$$

azaz létezik olyan *végtelenül kicsiny* ε *mérték*, amelyet elég sokszor véve nagyobb lesz egynél. Ezt nevezzük *archimedesi folytonosság*nak. A definició szép és értékes, tökéletesen megfelel intuicióinknak, hiszen érezzük, akármilyen kis mennyiséget elég sokszor véve akármilyen nagy mennyiséget is elérhetünk. De, ha a végtelen kicsit végtelen sokszor vesszük, akkor végtelen nagyhoz jutunk, vagy akárcsak egy véges nagysághoz? Erre bizony nem kapunk választ! Tehát az archimedesi folytonosság legalább két problémát nyitva hagy: vajon mikor lesz az ε *végtelenül kicsi, továbbá mi történik, ha* $n\varepsilon \le 1$, azaz soha sem éri el az egyet?

A kérdések megválaszolására a következő korokban számos próbálkozást láthatunk.

2 Középkor

A tétel kielégítette több évszázadon át a tudományt, legalábbis a kalkulus területét: nagyon jól lehetett számolni a nagyon kis és a nagyon nagy - tehát még véges – számokkal, amelyek hiánytalanul megfelelnek ennek a folytonosságnak. Még azt a kérdést sem tették fel – legalábbis nem tudunk róla, hogy mi van akkor, ha ez a sokszorozás mégsem nőne egy fölé!

A középkor legnagyobb tette ezen a területen újabb és újabb ellentmondások, érthetetlenségek kimunkálására korlátozódott. Jól néztek ki ezek a rejtélyek, titokzatosságok, a korlátlan vallási hatalmasságok számára. Az ágostoni és a szenttamási filozófia egyaránt a fizikai világ fölé boltozódó természetfeletti világot hirdeti, amelybe *nem lehet gondolkodással behatolni, ott a Szentháromság és a feltámadás van*. A világunk tehát a tudomány számára véges. A korlátokat a teológia őrzi, a szabad akarat eddig terjed. A dogma olyan súlyos volt, hogy széttöréséhez eretnek mozgalmaknak, vallásháborúknak és a reformációnak kellett bekövetkeznie.

Mint eddig mindig mindennek, ennek is egyszer vége szakadt: Cusa, Kopernikus, Galilei munkássága kiszabadította a szellemet a bezártságból, igaz Brunót még megégették az eretnek tanok miatt. A végtelen témája is újraéledt, igényelték az új alkotások és az emberi kiváncsiság. Nicolaus Cusa a *Doctum Ignoranta* című művében az írja, hogy, *ha az ember nem képes megérteni az Istenség végtelenségét a maga racionális eszközeivel, akkor ezen a korláton kizárólag spekuláció útján képes továbblépni.*

A korra nagyon jellemző példának említem a Galilei-féle antinómiát, amelynek „megoldása" ma is filozófiai vitatéma. Mindenesetre alaposan rámutatott az intuitív gondolkodásunk hiányosságára, a megszokáson, az addigi tapasztalatokon nyugvó okoskodás kivetitésének új dolgokra tézis hibájára. Szigorú bizonyítással alátámasztott, konzisztens elmélet szükséges az ilyen új, matematikai problémák megoldásához. Erre később még visszatérünk. Nézzük előbb magát a kérdést és annak szemléletét Galileinél:

1. A pozitív egész számok között vannak négyzetszámok is. Jól látjuk, hogy a pozitív egészek tehát *többen vannak*, mint a négyzetszámok, mivel vannak köztük olyanok is, amelyek nem négyzetszámok.

2. Másrészről minden négyzetszám gyöke pozitív egészszám, tehát minden négyzetszámhoz tartozik a gyöke, ami pozitív egész, ugyanakkor minden pozitív egészhez tartozik egy négyzetszám, tehát ezek éppen *ugyanannyian vannak*.

Akkor a két állítás közül melyik igaz?

1. okoskodás:

Ha a pozitív egészek bármely véges sorozatát nézzük, mindig úgy találjuk, hogy köztük kevesebb négyzetszám van, tehát azok kevesebben vannak. A sorozat nagyságát bármeddig növeljük ez a különbség mindig fennáll, mivel a négyzetszámok egyre távolabb lesznek, tehát még kevesebben, míg a többiek változatlanul egyenletesen növekednek. Tehát a sorozatot a végtelenségig növelve is a pozitív egészek sorozata *nagyobb* lesz, mint a négyzetek sorozata, amely a *kisebb* rész.

2. okoskodás:

Ha a pozitív egészekből vett bármely sorozatot négyzetre emeljük, azt találjuk, hogy azok mindig éppen ugyanannyian vannak. Ha a sorozat nagyságát a végtelenségig növeljük ez az egyenlőség mindig fennáll: minden pozitív egésznek van négyzete és minden négyzetszámnak pozitív egész a gyöke.

Következmény:

A két tétel közül valamelyik nem igaz, tehát nem tétel, vagy csak bizonyos esetekben igaz. Itt látjuk, hogy bármilyen véges halmaz esetén mindkettő igaz.

A végtelen esetében a *nagyobb*, *kisebb* fogalom értelmét veszti, vagy valami más értelmet nyer!

Végülis Galilei ebből azt a következtetést vonta le, hogy a szokásos műveletek – összeadás, kivonás, szorzás, stb. - a végtelen esetében nem érvényesek.

Ma úgy mondjuk, hogy amennyiben egy-az-egyben kölcsönös megfeleltetés áll fenn egy halmaz és bármely részhalmaza között, akkor azok végtelen halmazok, mint a Galilei-féle antinómiában, ahol a négyzetszámok a természetes számok részhalmaza. Véges halmazok esetében a részhalmazok, mindig kisebbek a teljes halmaznál.

Az egy-az-egyben kölcsönös megfelelés tulajdonképen a bijekció művelete és mondhatjuk, hogy az ennek megfelelőek bijektív halmazok. Tehát kimondgatunk egy meghatározást: azok a halmazok, amelyeknek létezik bijektív részhalmaza végtelenek és amelyeknek nem, azok a halmazok végesek. Ez igaz, de nem szép meghatározása a véglegeseknek.

Folytatás a II. részben.