

TÖK feladatok.

A Tudományos Önképző Kör résztvevői számára.

1. Végezzük el ezt az összeadást úgy, hogy minden betű más számot jelent:

$$\begin{array}{r} \text{ÉLJEN} \\ \text{MÁJUS} \\ \hline \text{ELSEJE} \end{array}$$

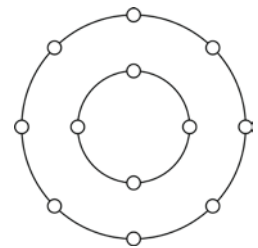
Megoldási segítség: $E=1$, mert $\text{É}+\text{M}>10$, de legfeljebb 17, mert egyjegyű számok. Ezután felírhatók egyenletek, például $N+S=11$. Egyes esetekben próbálkozni kell, ha több részmegoldás is lehetséges.

A megoldást _____ mutatta be. Gratulálunk neki!

2. Két koncentrikus körön található az 1-12 természetes számok az alábbi módon:

- a belső körön négy,
- a külső körön nyolc szám található úgy, hogy
- a külső körön (k) lévő számok összege a kétszerese a belsők (b) lévő

$$\text{összegének: } \sum_{i=1}^8 k_i = 2 \sum_{j=1}^4 b_j$$



Kérdések:

a: mely számok találhatóak a belső, illetve a külső körön, ha a belsők egymás után következnek? ---- $b_1+3= b_2+2= b_3+1= b_4$

b: hány megoldás van, ha nem egymást követők?

c: adjunk a megoldásnak szimmetrikus elrendezést!

Megoldási segítség: $\sum_{j=1}^4 b_j = \frac{n-1}{3}$ és $\sum_{i=1}^8 k_i = \frac{2 \sum_{n=1}^{12} n}{3}$; vagyis a számok összege egyharmada van a

belső körön a többi a külsőn. A rendszer a 13-ra és a 26-ra szimmetrikus.

A megoldást _____ mutatta be. Gratulálunk neki!

3. A Föld egyenlítőjének hossza 40 076 km, a Holdé 10 920 km. Tegyük fel, hogy erre kihúzzunk egy kötelet. A kötélt beletoldunk egy darabot, amelyet koncentrikus körré húzzuk az egyenlítővel.

a: mennyit kell betoldani, hogy egy ember (175cm) átférjen alatta?

b: és a Holdon?

c: van-e törvényszerűség és mi az?

Megoldási segítség: $k = 2r\pi$ és $k' = 2(r+175\text{cm})\pi$, a toldás $=k'-k$.

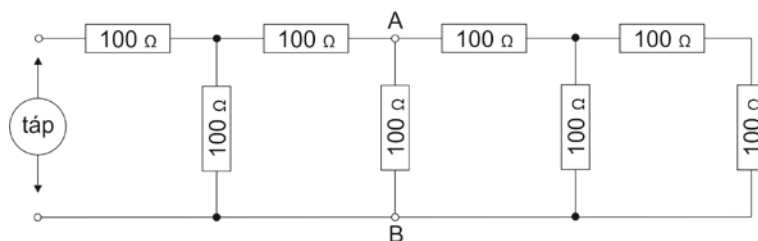
A megoldást _____ mutatta be. Gratulálunk neki!

4. Elektromos hálózat felépítése. Az ábra szerint 8 db 100 ohmos ellenállást összekapcsolunk és áramforrásra kötünk. Az A és B pontok között 50V feszültséget mérünk.

Kérdések:

a: milyen teljesítményű tápegységre van szükségünk és mekkora a tápfeszültség?

b: legalább milyen teljesítményre alkalmas ellenállásokra van szükség?



Megoldási segítség: párhuzamosan kapcsolt ellenállások számítása: $R_1 \times R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$; $I = \frac{U}{R}$

A megoldást _____ mutatta be. Gratulálunk neki!

5. Pénzfizetési feladat.

Kérdések:

a: kifizethető-e egymillió forint úgy, hogy minden pénznemből ugyanannyi darabot adunk?

b: ha nem, akkor mekkora az egymillióhoz legközelebbi, így kifizethető összeg?

c: hogyan kell ezt módosítani egymillió kifizetéséhez?

Megoldási segítség: $5+10+20+50+100+200+500+1000+2000+5000+10000+20000 = \dots$

A megoldást _____ mutatta be. Gratulálunk neki!

6. Kombinatorika.

Öt személy találkozik, akik kezet fognak egymással, mindenki, mindenkivel.

Kérdések:

a: hány kézfogás volt összesen?

b: általánosítsuk, mennyi lesz n személy esetén?

Megoldási segítség: készítsünk táblázatot, ahol a sorok, és oszlopok egyaránt a résztvevő személyek (5x5 mátrix).

A megoldást _____ mutatta be. Gratulálunk neki!

7. Koordinátageometria I.

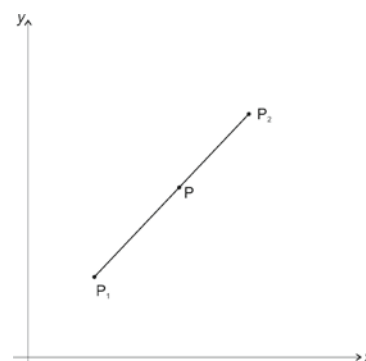
Adott egy egyenes szakasz P₁P₂ végpontjai koordinátaival.

a: határozzuk meg a felezőpont koordinátáit!

b: határozzuk meg a szakaszt a megadott $\frac{P_1P}{PP_2}$ arányban osztó P

pont koordinátáit!

c: mutassuk ki, hogy a megadott arány szélső értékeinél a végpontok koordinátáit kapjuk! Vagy nem?



Megoldási segítség: $\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{m}{n} = \lambda$ és felezés esetén $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; stb.

A megoldást _____ mutatta be. Gratulálunk neki!

8. Koordinátageometria II.

Adottak egy háromszög csúcseinak koordinátái.

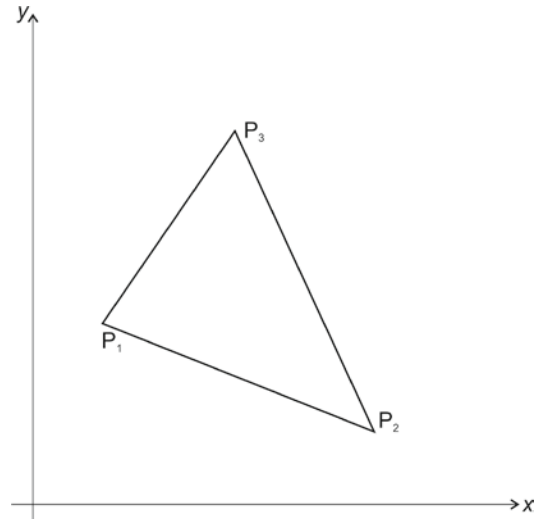
a: mekkora a területe?

b: mi a magyarázata, ha az érték negatív?

Speciális eset, ha a három pont egy egyenesbe esik; mutassuk be, hogyan alakul el a területszámításból!

Megoldási segítség: a háromszög köré rajzolt négyzetből kivonjuk a keletkezett derékszögű háromszögek területét. Speciális eset: vegyük észre az hasonlóságot a Koordinátageometria I.-el.

A megoldást _____ mutatta be.
Gratulálunk neki!



9. Koordinátageometria III.

Vegyünk fel egy síkkoordináta rendszerbeli egységnyi léptékű hálót; tehát a hálópontok egészszámokból álló kettősök. Bármely két hálópont összeköthető egymással. Nevezzük mindazokat az összekötő szegmenseket tiszta szegmensnek, amelyek nem érintenek más hálópontokat.

Kérdések:

a: a koordinátarendszer origójából rajzolt egység-sugarú körnek van-e és melyek a hálópontjai?

b: határozzuk meg ezeket az 5 sugarú kör esetén!

c: mekkora sugarú az a kör, amely a b:-vel hasonló tulajdonságú?

d: mi a szabályszerűség?

e: létezik-e olyan origón átmenő egyenes, amely tiszta, ha igen, akkor adjuk meg egyenletét!

Megoldási segítség: a kör analitikus egyenletének egész értékű megoldásait keressük.

A megoldást _____ mutatta be. Gratulálunk neki!

